جامعة طنطا
كلية الآداب
قسم الفلسفة

عنــوان الـرســالـــة

دور بـرتـرانـد رسل فى تطوير المنـطق الرياضى

Bertrand Russell's Role in the Development Of Mathematical Logic

رسالة ماجستير مقدمة من

الباحث / وائل زكى السيد عبد الرحمن

إشــراف

الأستاذ الدكتور
محمد مهران رشوان
أستاذ المنطق وفلسفة العلوم المتفرغ
كلية الآداب – جامعة القاهرة

الأستاذ الدكتور
محمد فتحى عبد الله
أستاذ الفلسفة اليونانية المتفرغ
كلية الآداب – جامعة طنطا

٢٠٠٥

بسم الله الرحمن الرحيم

"وقلِ اعمَلوا فسيرى اللهُ عملكُم ورسوُلهُ والمؤمِنُونَ"

صدق الله العظيم

"سورة التوبة – الآية رقم ١٠٥"

شكـــر وتقـــديـــر

أتقدم بأسمى آيات الشكر وجزيل الامتنـــان للأســـتاذ **الدكتور/ محمد مهران رشوان**، والأستاذ **الدكتور/ محمد فتحي عبد الله** لما بذلاه من جـــهد فـــى الإشراف على هذه الرسالة وأهدى إليهما هذه الأبيات المتواضعة:

أهـل العلـوم لهـم فـى القلـب أركـان	**أرسـى قواعدهـا فـى المنطـق مـهران**
والفتـح فـى منطقـى لم يـأتنى إلا	**مـن بحـر "فتحـى" مـن للعلـم قبطـان**
هـذى الرسـالة لولاكـم لمـا كـانت	**ومـا اسـتقام لهـا بحـث وعنـوان**
أنتـم تقـودون فلـك النـور مشـرعة	**وبكم تضرب الأمثـال فـى العِلم عـبر الزمـان**
أقـدم إليكـم جـهوداً . منكُـم نبعـت	**فـهل يحالفـها صفـحٌ وغفـران**

كما أتوجه بخالص الشكر والتقدير إلى الأساتذة الأجلاء أعضاء اللجنة التى ستتفضل بقراءة هذه الرسالة والاشتراك فى مناقشتها.

المقدمة

نضج الفكر الرياضي قبيل النصف الأخير من القرن التاسع عشر، حيث ظهرت مرحلة النقد الذاتي للرياضيات، فقد وجد أن العديد من الأفكار الرياضية الأساسية قد أُقرت في السابق دون نقاش حول مدى صحتها ومعرفة الأسس التي تقوم عليها، وأيضاً ظهر في الرياضيات العديد من التناقضات لذلك فقد أصبحت الرياضيات في حاجة إلى أساس دقيق تقوم عليه وإلى طريقة منهجية للبحث فيها.

ومن المعروف أن خاصية التناقض هي خاصية منطقية وليست رياضية ومن ثم فلكي تصبح الرياضيات خالية من التناقض يجب أن تستند بالضرورة إلى الاتساق المنطقي حتى تصبح نسقاً محكماً.

لذلك فقد أصبح من الضروري إحداث تغيير أساسي في المنطق للتغلب على مثل هذه التناقضات التي ظهرت في الرياضيات، وذلك عن طريق إعادة البحث في القضايا وأنواعها وتركيبها وكتابتها بصورة رمزية خالصة وأيضاً البحث في الاستنباط وقوانينه مما أدى إلى تطور علم المنطق.

فقد أصبحت مسألة العلاقة بين الرياضيات والمنطق من أهم المسائل المتعلقة بأسس الرياضيات .

وقد ظهرت العديد من الاتجاهات لتفسير هذه العلاقة، منها الاتجاه المنطقي ، الاتجاه الصوري ، الاتجاه الحدسي

وسوف يقوم الباحث بدراسة الاتجاه المنطقي عند برتراند رسل (١٨٧٢–١٩٧٠) والذي كان له دورٌ كبيرٌ في حركة تطور علم المنطق، حيث عمل على إعادة تنظيم البحوث المنطقية، وإزالة ما بها من غموض وتناقضات، فقام بتطوير نظريات منطقية سبق لغيره من المناطقة دراستها، حيث أسهم كل واحد منهم بإسهام معين، وتجمعت كل هذه الإسهامات عند برتراند رسل، فكان عليه أن يستفيد منها ويطورها، ليس هذا فقط بل قام أيضاً بابتكار نظريات منطقية لم تكن موجودة عند أحد من السابقين عليه مثل نظريتي الأوصاف والأنماط.

وقد تحدث رسل عن هذه الإسهامات وغيرها في العديد من الأبحاث والمؤلفات والتي كان أشهرها وأهمها في هذا المجال هو كتاب " برنكيبيا ماتيماتيكا" Principia Mathematica والذي ألفه بالاشتراك مع زميله الفرد نورث واتيهد (١٨٦١–١٩٧٤)، فقد كان لهذا الكتاب عظيم الأثر في التطورات المنطقية اللاحقة، حيث تم فيه تأصيل نسق المنطق الرياضي بحيث أصبح أساساً تستقر عليه كل الرياضيات.

لكن جهود وايتهد قد توقفت تقريباً في هذا المجال بعد ظهور كتاب " برنكيبيا ماتيماتيكا " أما رسل فقد أستمر في أبحاثه في هذا المجال ، بحيث يمكن القول بأنه كان لرسل الدور الأهم والأكثر تأثيراً على عقول الرياضيين والمناطقة ، فعلى الرغم من تطور الأبحاث الرياضية والمنطقية منذ كتابات رسل إلى الآن بشكل كبير أكثر من أي فترة أخرى ، إلا أن أبحاث رسل تظل دائماً هي نقطة البدء التي لا غنى عنها لكل الأبحاث اللاحقة .

من هنا فقد أختار الباحث عنوان بحثه وهو **" دور برتراند رسل في تطوير المنطق الرياضي "**

أما عن المنهج المستخدم في هذه الدراسة فهو المنهج التاريخي، التحليلي المقارن، ويستخدم الباحث كل منهج كلما دعت الضرورة لذلك، فالمنهج التاريخي يستخدمه الباحث في تتبع بعض الأفكار وتأصيلها تاريخياً، أما المنهج التحليلي فيستخدمه الباحث في تحليل الأفكار التي يتعرض لها بالدراسة، أما المنهج المقارن فيستخدمه الباحث للمقارنة بين أفكار المناطقة لبيان أوجه الاتفاق والاختلاف فيما بينهم.

وقد سعى الباحث في هذه الدراسة إلى الإجابة على عدد من التساؤلات وهي :ـ

- كيف أثرت حركة تطور الرياضيات في القرن التاسع عشر على حركة تطور المنطق ؟
- ما هي الأسس التي أقام رسل منطقه الرياضي عليها ؟
- كيف استطاع رسل أن ينظم أبحاث المنطق؟ ويزيل ما بها من غموض ؟
- كيف استطاع رسل أن يفسر المفاهيم الرياضية الأساسية انطلاقاً من المفاهيم المنطقية ؟
- ما هو موقف رسل من الاتجاهات السائدة في عصره في مجال تفسير العلاقة بين الرياضيات والمنطق ؟
- كيف استطاع أصحاب أنساق ما بعد " البرنكيبيا " تطوير منطق رسل ؟ وكيف أن أنساقهم تسير في نفس اتّجاه البرنكيبيا ؟

وقد حاول الباحث الإجابة على هذه التساؤلات من خلال فصول هذه الدراسة ، حيث تتكون هذه الدراسة من مقدمة وأربعة فصول وخاتمة .

أما عن المقدمة فقد قام فيها الباحث بالتعريف بالبحث وبيان أهميته والمنهج المستخدم فيه كما طرح التساؤلات الموجهة لهذه الدراسة .

أما فصول الدراسة فهي على النحو الأتي : ـ

الفصل الأول وعنوانه " **رياضيات القرن التاسع عشر وأثرها على تطور المنطق** "

ويتناول فيه الباحث بالدراسة الموضوعات الآتية : ـ

أولاً : ــ العلاقة بين الرياضيات والمنطق

ثانياً : ــ تطور المنطق

حيث يقوم الباحث بدراسة تطور المنطق عند كل من :ــ

أولاً: جورج بيكوك

ثانياً: دي مورجان

ثالثاً: جورج بول

رابعاً: جوتلوب فريجه

خامساً: بيانو

الفصل الثاني وعنوانه "**برتراند رسل ونسق البرنكيبيا**"

ويتناول فيه الباحث بالدراسة الموضوعات الآتية : ـ

أولاً: وصف كتاب " برنكيبياماتيماتيكا ".

ثانياً: أهمية كتاب " برنكيبياماتيماتيكا ". ودور رسل فيه.

ثالثاً: الرموز المستخدمة فى كتاب " برنكيبياماتيماتيكا ".

رابعاً: ترقيم المبرهنات في كتاب " برنكيبياماتيماتيكا "

خامساً: الموضوعات المنطقية في كتاب " برنكيبياماتيماتيكا "

حيث يتناول الباحث بالدراسة الموضوعات الآتية :-

أ. موقف رسل من مبحث القضايا.

ب. نظرية حساب القضايا.

جـ.نظرية حساب دالات القضايا

د. نظرية الأوصاف.

هـ. نظرية حساب الفئات

و. نظرية الأنماط المنطقية.

ى.نظرية حساب العلاقات.

الفصل الثالث وعنوانه **"الاتجاه المنطقى عند رسل وموقفه من الاتجاهات المنطقية السائدة فى عصره"**

ويتناول فيه الباحث بالدراسة الموضوعات الآتية : .

أولاً : — الاتجاه المنطقي عند رسل في ضوء تعريفه للأعداد

ثانياً : — الاتجاه الصوري

- موقف رسل من الاتجاه الصوري

ثالثاً : — الاتجاه الحدسي

- موقف رسل من الإتجاه الحدسي

الفصل الرابع وعنوانه **"تطوير المناطقة المعاصرين واللاحقين لمنطق رسل"**

حيث يتناول فيه الباحث بالدراسة تطوير منطق رسل عند كل من:-

أولاً : اودفيج فتجنشتين

أ. أسس الرياضيات

ب. الذرية المنطقية ورؤية العالم

ثانياً: فرانك بلمبتون رامزي

أ. نظرية الأنماط

ب. دالة القضية

ثالثاً: كلارنس إيرفنج لويس

رابعاً: ويلارد فان أورمان كواين

خامساً: يان لوكاشيفيتش

أما الخاتمة – فقد دون فيها الباحث أهم النتائج التي توصل إليها .

الفصل الأول

رياضيات القرن التاسع عشر وأثرها على تطور علم المنطق

محتويات الفصل الأول

تمهيد

أولاً : **العلاقة بين الرياضيات والمنطق.**

ثانياً : **تطور علم المنطق عند كل من :-**

١- جورج بيكوك.

٢- دي مورجان .

٣- بول .

٤- فريجه .

٥- بيانو .

تعقيب

تمهيد : -

لقد كان لرياضيات القرن التاسع عشر أثر كبير على تطور علم المنطق.بحيث يمكن القول أنه لا يمكننا فهم منطق القرن التاسع عشر،ولا حتى منطق القرن العشرين فهماً دقيقاً، بدون الفهم والإلمام برياضيات القرن التاسع عشر

فإذا كانت الرياضيات قد اكتسبت منذ ظهورها قدراً كبيراً من الدقة واليقين وذلك بفضل جهازها الرمزي ودقة الاستنباط فيها. فقد حاولت علوم كثيرة أن تعبر عن قضاياها بصورة رياضية كي تحقق أكبر قدر ممكن من الدقة واليقين.

وبالمثل حاول المنطق وهو أقرب العلوم إلى الرياضيات . حيث عمل المناطقة على إصلاح المنطق وتطويره لكي يكون صالحاً لأن نعبر عن قضاياه وقوانينه بصورة رياضية . وأيضاً توسيع دائرة الاستنباط بحيث لم يعد الاستنباط محصوراً في القياس وحده. فقد تحدثوا عن علاقات استنباطية أخرى مثل علاقة المساواة وعلاقة أكبر من وأصغر من وغيرها من العلاقات التي كانت مستخدمة في علم الرياضيات.

وإذا كان المنطق قد احتاج إلى الرياضيات كي يحقق هدفه. فقد احتاجت الرياضيات أيضاً إلى المنطق حتى تتخلص من النقائض التي ظهرت فيها والتي اتضح أنها ذات طبيعة منطقية، فقد كانت أهمية الرياضيات تتوقف على ما هو معروف ولا تتوقف كثيراً على كيفية معرفته، لهذا كان من الضروري تحليل الأسس التي تقوم عليها الرياضيات وتفسيرها تفسيراً منطقياً. فالتفكير الرياضي يجب أن يستند إلى الاتساق المنطقي.

لقد أدت هذه العلاقة المتبادلة بين الرياضيات والمنطق، من حيث احتياج كل منهما للآخر إلى تطور علم المنطق.

وقد خصص الباحث هذا الفصل لتوضيح أثر رياضيات القرن التاسع عشر على تطور علم المنطق، وذلك في ضوء بعض إسهامات العديد من علماء المنطق في القرن التاسع عشر وسوف يتناول الباحث بالدراسة في هذا الفصل الموضوعين الآتيين:

أولاً : العلاقة بين الرياضيات والمنطق .

ثانياً: تطور المنطق عند كل من :-

١. بيكوك
٢. دي مورجان.
٣. بول.
٤. فريجه.
٥. بيانو.

أولاً- العلاقة بين الرياضيات والمنطق

إن المنطق الرمزي نمط جديد من الدراسات المنطقية جاء نتيجة للتطورات العلمية الحديثة وخاصة في مجال الرياضيات[١].

لقد كانت الرياضيات والمنطق تاريخياً نوعين من الدراسة متميزين تماماً. فقد ارتبطت الرياضيات بالعلم، والمنطق باللغة اليونانية، لكن كليهما تطور في الأزمنة الحديثة، فأصبح المنطق أكثر رياضياً والرياضيات أكثر منطقية[٢].

فقد بدأ منذ نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين الاتجاه إلى توسيع مفهوم المنطق ، وكذا ازدياد الاتجاه إلى صياغة الرياضيات صياغة صورية، مما ترتب عليه إظهار أن مجالي المنطق والرياضيات كانا يزدادان قرباً. فالاستدلال الرياضي ليس استدلالاً لفظياً، بل هو استدلال رمزي كما أنه لا يأخذ صورة التعبير ذي الموضوع والمحمول ، وإنما هو في حقيقة الأمر استدلالٌ منطقيٌ. كما أن توسيع مفهوم المنطق أظهر هو الآخر عدم ضرورة اتخاذ المنطق صورة المنطق الحملي ، بل إمكان تعديله وإقامته على طريقة رياضية[٣] ، وأيضاً فإن تجريد المشكلة المنطقية يكافيء تماماً تجريد المشكلة الرياضية مما يدل على أن هناك تشابه بين الأنساق الرياضية والأنساق المنطقية وهذا ما تم توضيحه من قبل المناطقة المعاصرين[٤] ، فقد أصبح من الواضح أن كثيراً من البحث الرياضي الحديث يقع على محيط المنطق . كما أن كثيراً من المنطق الحديث رمزي وصوري، مما جعل العلاقة

---

(١) د.محمد مهران: مقدمة في المنطق الرمزي، دار الثقافة للنشر والتوزيع ، القاهرة ، ١٩٩٥ ، المقدمة ص م

(٢) برتراند رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية ، ترجمة د. محمد مرسى أحمد. مراجعة د. أحمد فؤاد الاهواني ، مؤسسة سجل العرب القاهرة ، ١٩٨٠ ، ص ٢٠٨

(٣) د. عزمي إسلام: أسس المنطق الرمزي ، مكتبة الأنجلو المصرية ، القاهرة ، ١٩٧٠ ، ص ص ٢٦، ٢٧

(4) Robert John Ackerman, Modern Deductive Logic, Macmillan, New York, 1968, P 6

الوثيقة بين الرياضيات والمنطق واضحة لكل دارس المنطق[٥]، وقد جاءت هذه العلاقة التي أدت إلى تطور كل منهما نتيجة لظهور الحاجة إلى دراسة نقدية تعيد النظر في أسس الرياضيات، فقد خضع كل من الجبر والهندسة بين عامي (١٨٢٥ و ١٩٠٠) للعديد من التغيرات والتي كانت مختلفة تماماً عما كان شائعاً قبل ذلك، هذه التغيرات كان لها أثرها القوى على كل مناحي ومجالات تطور المنطق الرياضي[٦]، ففي كل مرحلة من تاريخ علم الرياضيات غالباً ما واجه علماء الرياضيات أوقاتاً عصيبة نشأت عن الطريقة التي بنى عليها علم الرياضيات. فبنية علم الرياضيات تشبه ناطحات السحاب، إلا أن علماء الرياضيات عندما شرعوا في هذه البنية لم يتغلغلوا في أسسها الداخلية[٧] ، حيث كان ما لدى الرياضيين من معرفة بمضمون الرياضيات وخصائص النسق والبرهان متواضعاً إذا ما قورن بما يُجب أن يكون عليه أهل التخصص .فكانت أهمية الرياضيات وقيمتها في ذلك الوقت تتوقف على ما هو معروف ولا تتوقف كثيراً على كيفية معرفته[٨].

فالرياضيات وخاصة منذ عصر ليبنتز ونيوتن تقدمت تقدما كبيراً وحصلت قدراً كبيراً من المعرفة الجديدة ، إلا أن أسس الرياضيات لم تتطور بالسرعة الكبيرة التي ينمو بها البناء الرياضي نفسه[٩]، ففي عام ١٨٢٥ أو بعد ذلك بقليل لم يكن الجبر سوى نظرية المعادلات والتي كانت فيها حروف الهجاء تستخدم عوضاً عن الأعداد وعلامات مثل

---

(٥) برتراند رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية، ص٢٠٨

(6)P.H Nidditch , The Development of Mathematical logic, Routledge , Kegan Paul , London , 1962 , p23

(7) Mathematics in the Modern world , Reading from Scientific American , with introduction by Morris Kline, W.H Freeman Company, Sanfrancisco and London , 1968, P 180

(٨) د. محمد محمد قاسم : جو تلوب فريجة ، نظرية الأعداد بين الابستمولوجيا والانطولوجيا . دار المعرفة الجامعية ، الإسكندرية ١٩٩١ ، ص٣٠

(٩) د. عزمي إسلام : دراسات في المنطق ، مع نصوص مختارة، مطبوعات جامعة الكويت . الكويت ١٩٨٥، ص٧٧

(+،×،−،÷) كانت تستخدم لتشير إلى عمليـات الجمـع والضـرب ومقابلاتـها أي عمليـات الطرح والقسمة بإعتبارهما ضداً لعمليتي الجمع والضرب[١٠].

فلم تكن هناك رؤية أو فكر واع يرى أن وجـود وعـرض القواعـد الضابطـة للمعـادلات شيئاً ضرورياً[١١]، الأمـر الـذي أدى إلى ظـهور مرحلـة النقـد الذاتـي للرياضيـات والـتي بـدأت بمحاولـة قويـة لتوضيـح المفـهومات الأساسـية للرياضيـات،والـتي أقـرت في السـابق – دون نقاش – حـول مدى صحتـها، وكـان الجـهد مثمـراً في حـالات عديـدة، فقـد نجـح الرياضيون في إيجاد تعريفات دقيقة لمثل هـذه المفـهومات. مثـل أفكارنـا عـن الحـد والعـدد الاشتقاقي، والعدد المركب وغيرها. وقد ظلـت هـذه المفـهومات تطبـق في الرياضيـات لفـترة طويلة بنجاح دون أن يكون قد تم تعريفها تعريفاً دقيقاً ، لكن هذا النقد الذاتي للرياضيات قد جعلها مجزأة مهلهلة ، وخاصة بعد نبذ القـاعدة الـتي كـان تستند إليـها وهـى فكـرة الاتصال الهندسي[١٢].

فقد رأى الرياضيون أن تعريفات ومبـاديء ومصـادرات اقليـدس مرتبطـة بالأشـكال والرسـوم diagrams، فـإذا أردنـا البرهـان علـى نظريـة إقليديـة واسـتخدمنا الأشـكال والرسوم بدت واضحة، فإذا استبعدنا تلك الأشكال والرسوم وأبعادها، جاء البرهان ناقصاً معيباً[١٣].

لقد كان ينظر إلى الهندسة على مر السنين على أنها أعظم فرع متكامل من الرياضيات حيث كـان ينظـر إلى شـكلها الاسـتدلالي علـى أنـه يقـدم الأسـلوب الأمثـل للوصـول إلى المعرفـة الحقيقيـة.تلـك المعرفـة الـتي تعتـبر المعرفـة الأرقـى والأعظـم إذا مـا اسـتثنينا المعرفـة

(10) P.H Niddich, op. Cit، p23

(11)Ibid, P24

(١٢) د. محمد ثابت الفندى : أصول المنطق الرياضي ، دار المعرفة الجامعية ، الإسكندرية ، ١٩٨٧، ص ١٠٢

(١٣) د. محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي، نشأته وتطوره، دار النهضة العربية، بيروت ١٩٧٣، ص١٠٩

الدينية[14]. لكن الأمر اختلف بعد ظهور مثل هذه النقائض فقد حاول الرياضيون إقامة ما يسمى بالهندسات اللاإقليدية والتي لا تهتم بالصدق الواقعي للنظريات، وإنما تبدأ من تعريفات ومباديء نستنتج منها النظريات بحيث يكون الاستنتاج صورياً محكماً ودقيقاً لا أثر فيه لرسوم وأشكال أو فكرة المكان . فقد بذل الرياضيون جهداً منقطع النظير في أن يكسبوا عملهم وحدة ودقة ويقيناً وذلك بأن يقيموه على ذلك الجزء الذي لا يتطرق إليه الشك عندهم وهو الأعداد الأولية"علم الحساب"بحيث اتخذت الأعداد معياراً لكل يقين رياضي، فاشتقوا من الحساب الأولى المعروف كل أنواع الدوال والأعداد مثل إضافة ($\sqrt{-1}$) والنظريات الأخرى في الرياضيات . واحتاجوا في سبيل إنجاز ذلك إلى نظريات إضافية معقدة وذلك لكي تقوم الرياضيات برمتها كوحدة متسلسلة قاعدتها الوثيقة علم الحساب. ومن هنا نضج ما يعرف في تاريخ الرياضيات "بالمذهب الحسابي" والذي بفضله أصبحت الرياضيات على حد تعبيرهم محسبة[15]، وحينما أقيمت الرياضيات على أساس الحساب، تساءل الرياضيون لماذا تعتمد الرياضيات على الحساب وحده دون الحدس المكاني؟ ألا يقوم الحساب أيضا على أساس حدس الأعداد، فأنت تحدس مثلاً العدد(١) ثم تضيف إليه ٢ ، ٣ ، ٤ إلى مالا نهاية، بالإضافة إلى أن الرياضيات نفسها قد ظهرت فيها بالفعل عدة نقائض[16]، فالرياضيون أنفسهم وكذلك المناطقة الناظرون في أسس الرياضيات لم يقتنعوا جميعا بأن تكون الأعداد الحسابية هي السند الوثيق للرياضيات فلماذا تكون الأعداد أولى باليقين من الحدس المكاني؟ ألم يتراجع الحدس في الرياضيات كلها ليظهر محصوراً في نطاق الأعداد وحدها ، ومن ثم فلماذا لا يبحث عن سند أوثق وغير حدسي للأعداد نفسها[17] ، لذلك فقد طالبوا بتوضيح فكرة العدد نفسها توضيحاً منطقياً ، وقد تطلب هذا البحث في الأسس المنطقية للحساب مع البحث في التحليل المنطقي لفكرة العدد نفسها

---

(14) P.H Nidditch, OP. Cit, P 29

(١٥) د. محمد ثابت الفندى : أصول المنطق الرياضى ، ص ١٠٢

(١٦) د. على عبد المعطى، د/ محمد محمد قاسم: المنطق الرياضي. الأسس والتطور والنظريات ، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية ١٩٨٥،ص ٩١

(١٧) د. محمد ثابت الفندى : المرجع السابق، ص ١٠٢

كهدف للبحث الأول ، قد تتطلب هذا بصورة قاطعة وجود نسق منطقي يتصف بالشمول والدقة الكاملة(١٨).

إن استخدام الأنساق المنطقية يتضح بصورة أولية في تحليل البراهين الرياضية والعلمية وأحياناً الفلسفية، حيث يمكن استنتاج نتائج كثيرة من أفكار بسيطة قليلة وواضحة(١٩).

لقد كان من الواضح أن ميول واتجاهات القرن التاسع عشر والتي كانت سائدة في ذلك الوقت كانت تحليلية، ومن ثم فإن المتخصصين في علم الرياضيات قد انغمسوا لدرجة كبيرة في تطوير هذه الوسيلة الرائعة لعلم الحساب بتطبيقاته التي لا تحصى(٢٠)، لذلك فقد وجد الرياضيون أن المنطق التقليدي (المدرسة الأرسطية) في جملته وسيلة غير كافية لهذا الغرض، لهذا فقد شرعوا في بناء وتنمية نسق المنطق والذي اتضح على الفور أنه هو النسق الأكثر ملائمة وإحكاماً وضبطاً والأكثر شمولية واتساعاً للإدراك(٢١).

فضرورة إعادة بناء جديد للمنطق أصبحت أكثر إلحاحاً وذلك عندما لوحظت العديد من التناقضات في مجال الرياضيات والتي ثبت فيما بعد أنها ذات طبيعة منطقية عامة، وهذه التناقضات يمكن التغلب عليها فقط من خلال إعادة بناء أساسي لعلم المنطق(٢٢).

إن التفكير الرياضي يجب أن يستند بالضرورة إلى الاتساق المنطقي بمعنى آخر لابد وأن تكون الرياضيات خالية من التناقض حتى تأتي نسقيتها محكمة، ومن المعروف أن خاصية

---

(١٨) د. عزمي إسلام : دراسات في المنطق ، مع نصوص مختارة، ص ٧٨

(19) Robert John Ackerman, OP. Cit, P.8

(20) James Pier Pont, The History Of Mathematics in Nineteenth Century Reading From Bulletin Of The American Mathematical Society. V 37, P18

(21) Rudolf Carnap, Introduction to Symbolic Logic and its applications, Dover Publications Inc, New York, 1958, P 3

(22) Rudolf Carnap, The Old and the New Logic, Reading From, Logic as philosophy, Edit by, Peter T. Manicas ,Van No strand Reinhold Company, New York, 1971, P 72

عدم التناقض هي خاصية منطقية وليست رياضية فقانون عدم التناقض هو القانون المحوري الذي تأسس عليه علم المنطق[٢٣]، ومن هنا فقد التقى في المنطق هدفان. هدف تطويره سريعاً إلى علم رياضي وثيق، ثم هدف اشتقاق الرياضيات منه، فيضفى بذلك يقينه على قضاياها[٢٤]، فمثلاً نجد أن المذهب اللوجستيقي حين أراد أن يسهم في الحركة الفكرية المعاصرة حول أسس الرياضيات، اصطنع لنفسه أولاً وقبل كل شيء آلة رياضية دقيقة لتحليل المسائل المعروضة عليه وهي (المنطق الرياضي) وهو المنطق الذي تسلح بسلاح الرياضيات نفسها، حيث تسلح بأدق الرموز والعمليات الحسابية المختلفة مبتعداً بذلك عن استعمال الأقيسة اللغوية، وذلك على غرار الرياضيات حتى أصبح قادراً تماماً على التعبير عن قضايا الرياضيات نفسها بلغة المنطق وحده، وعلى تحليل أسسها وردها برمتها إلى حدود المنطق وقضاياه الصرفة[٢٥].

فالهدف من اللغة الرمزية في المنطق الرياضي هو أن نحقق في المنطق كل ما تم تحقيقه في علم الرياضيات ،وهو معالجة مضبوطة لموضوع بحثه، كما أن العلاقات المنطقية التي تتعلق بالأحكام والمفاهيم يتم تقديمها بصيغ وأشكال تكون تفسيراتها بعيدة عن الغموض الشائع في اللغة العادية[٢٦]، وبصفة عامة فإن استخدام الرموز في علم من العلوم إنما يعبر بصدق عن الشوط الذي قطعه هذا العلم في درب التقدم[٢٧]، ففي كثير من الأحيان

---

(٢٣) د. ماهر عبد القادر : المنطق الرياضي ، دار المعرفة الجامعية ، الإسكندرية ١٩٨٩ ، ص١٨

(٢٤) محمد ثابت الفندى : المرجع السابق ، ص ١٠٣

(٢٥) د. محمد ثابت الفندى : فلسفة الرياضة ، دار المعرفة الجامعية ، الإسكندرية ١٩٩٠ ، ص١٢٤

(26) D. Hilbert and W. Ackermann, Principles of Mathematical Logic, Chelsea Publishing Company, New York, 1950 , P1

(٢٧) د. محمد محمد قاسم : المرجع السابق ، ص٤٣

نجد أن العبارات التي تتطلب سطوراً عديدة في اللغة اللفظية يمكن أن توضع رمزياً في سطر واحد أو أقل مما يسهل عمليات المعالجة والمقارنة والاستدلال(٢٨).

مما سبق يتبين لنا أن المنطق الرياضي قد أخذ في النمو في تربة الرياضيات، حيث أن نجاحاته الأولى قد تحققت في مجال الرياضيات، ليس هذا فحسب ، لكنه أيضاً لم يجد قبولاً إلا لدى الذين تمرسوا على استخدام التقنيات الرياضية(٢٩)، وأيضاً فهو امتداد للطريقة الصورية لعلم الرياضيات وأيضاً لعلم المنطق ، فهو يوظف لغة رمزية لعلم المنطق مثل التي تم استخدامها للتعبير عن العلاقات الرياضية(٣٠).

كما أن المنطق الرياضي قد استمد منهجه البديهي من الرياضيات ، ولذلك أصبح نسقاً **System** من القضايا بعضها بديهيات والبعض الآخر مبرهنات **Theorems** أو صيغ مبرهنة تم استنتاجها من البديهيات بواسطة قواعد التحويل أو الاستنتاج .

ونحن عندما نسعى جاهدين لتلخيص أهم السمات الأساسية لعلم الرياضيات فإن أول ما نراه هو التناسق والتوافق الكبير والنمو السريع لكل الاتجاهات تقريباً ، كذلك تنوع فروعها وتركيب وعمومية طرقها ، والخيال الإبداعي الذي لا ينضب، والدراسات التمهيدية واستخدام العناصر المثالية النموذجية والتطور المنطقي الدقيق لكل أجزائها(٣١)، هذا النمو والتطور قد أدى إلى تطور مماثل في مجال المنطق .

---

(28) Rudolf Carnap, Introduction to Symbolic Logic and its application, P2

(29) H, Reichanbach. Elements of symbolic logic, Dover Publication, Inc, New York 1975. PV

(30) D. Hilbert and W. Ackermann, op. cit, p1

(31) James Pier Pont, op. cit, P24

ثانياً- تطور علم المنطق

لقد ساهم في تطور علم المنطق العديد من أعلام القرن التاسع عشر، حيث كان لهم الفضل في إيقاظ المنطق من ثباته الطويل، وإرسائه على أسس رياضية ،وفيما يلي سوف نتحدث عن بعض هؤلاء الأعلام وبعض إسهاماتهم التي ساعدت على تطور علم المنطق.

١ - جورج بيكوك (١٧٨٩ - ١٨٥٧)

في عام (١٨٢٥) أو بعد ذلك بقليل لم يكن الجبر سوى نظرية المعادلات. وكانت مهمة النظرية هو تحصيل معلومات عن الكيفية التي يمكن من خلالها أن تصبح هذه المعادلات محلولة لتعطى قيم عددية تجعلها صحيحة .

وكانت العمليات الأربع (الجمع والطرح والضرب والقسمة) وغيرها من العمليات كانت تجرى دون وعيٍ بالقواعد التي تقوم عليها تلك الإجراءات، حيث لم يكن هناك رؤية أو فكر يرى أن عرض هذه القواعد أو التعبير عنها شيئاً ضرورياً أو ربما داعماً لعملية تطوير الجبر.

وكان "بيكوك" هو الوحيد الذي قام بهذا العمل، حيث قام بصياغة جدول يضم قوانين وقواعد الجبر، حيث كان يرى أولاً أن أي معالجة جبرية يجب أن تعتمد على عرض كامل لنص القوانين التي تتكلم عن العمليات المستخدمة في هذه المعالجة ،ولن يكون هناك أي صفة مميزة لهذه العمليات ما لم يكن مقرر صحتها من البداية أو لم تكتسب عن طريق الاستدلال من القوانين الأولية والأساسية[٣٢]، وثانياً يجب أن تكون العلامات أو الرموز المستخدمة في العمليات الجبرية هادفة إلى عمل وتكوين استدلالات، بحيث لا تعطى معاني أقل أو أكثر من تلك التي تحددها القوانين الجبرية[٣٣].

(32) P.H. Nidditch, the Development of Mathematical Logic, P24

(33) Ibid, P25

٢ – دي مورجـان (١٨٠٦ – ١٨٧١)

لا يعرف دي مورجان لمعظم دارسي المنطق الرمزي إلاّ من خلال النظرية التي تحمل اسمه، وهى نظرية العلاقات لكنه قدم العديد من الإسهامات التي لها قيمتها البالغة[34]، كتب حول دراسة الرياضيات والصعوبات التي تكتنفها، وقد اهتم اهتماماً خاصاً بعملية تنظيم الرياضيات لأهداف تعليمية[35]، وقد استطاع أن يعبر بالرياضيات عن قوانين المنطق حيث أدخل القوانين والرموز الرياضية في الميدان المنطقي.

إلا أن نظرية العلاقات تعتبر من أهم ما استحدثه المنطق الحديث فهي تكوّن في المنطق جزءاً خاصاً غاية في الأهمية، كما أنها من أكثر فروع المنطق الرياضي تقدماً ، ويعد دي مورجان أول من يرجع إليه الفضل في استحداث هذا الجانب الهام من جوانب المنطق[36].

وقد بدأ دي مورجان بحثه في العلاقات بالنظر إلى الرابطة المنطقية التي تربط الموضوع والمحمول في القضية الحملية في اللغات الأجنبية. فمثلا القضية(محمد مجتهد) تتألف من موضوع ومحمول ولا رابطة، ولكن إذا ترجمت هذه القضية إلى كثير من اللغات الأوربية الحديثة وجدناها تحوى رابطة وهى في هذا المثال فعل الكينونة (I S) لتربط المحمول بالموضوع . وفعل الكينونة يقوم بوظيفة من الوظائف الآتية:–

١. الحمل. كما هو الحال في المثال السابق إذا صيغت القضية إلى اللغة الإنجليزية أو الفرنسية أو الألمانية.

٢. الوجود الفعلي . مثلما نقول أن (الله موجود)god is exists.

٣. الهوية أو المساواة مثلما نقول أن(أ يكون ب) حيث نريد أن نقول أ = ب .

---

(34) C.I. Lewis, A survey of Symbolic Logic. Dover Pub. Inc. New York. 1960. P 37

(35) Proir A. N., Modern Logic: Frege to the present, in the Encyclopedia of philosophy, Vol. 3, by Paul Edwards Macmillan publishing Co., INC, Free press, New York, 1967, P 553

(٣٦) د. زكى نجيب محمود : المنطق الوضعي ، الجزء الأول ، الطابعة الخامسة، مكتبة الأنجلو المصرية، ١٩٧٣، ص ١٤٩

وقد اهتم دي مورجان بالرابطة المنطقية حين تقوم بوظيفة الهوية دون وظائفها الأخرى. ورأى أن الرابطة لا تقوم بهذه الوظيفة إلا إذا توفر شرطان. هما : أن تكون متعديه Transitive،وأن تكون عكسية Convertible. ومن ثم أقدم على تعريف علاقتي التعدي والعكس . فالعلاقة تكون متعديه حين تربط حداً بحد آخر ، وتربط هذا الحد في نفس الوقت بحد ثالث ومن ثم تربط الحد الأول بالحد الثالث ، فمثلاً إذا كان أ = ب ، ب = ج فإن أ = ج ومن أمثلة علاقة التعدي علاقات المساواة والمشابهة والسبق الزمني والكبر والصغر.

وقد عرف دي مورجان العلاقة العكسية بأنها تلك العلاقة التي يمكننا أن نستبدل بها علاقة أخرى تؤدى نفس المعنى حين نغير ترتيب الحدود فمثلاً علاقة (......أب......) عكس علاقة (.....ابن.....) فمثلاً نقول أن القضية (أ. أب . ب) أنها تحوى علاقة عكسية بالقياس إلى القضية(ب ابن أ).

وقد درس دي مورجان أيضاً علاقة السلب وميز بين سلب العلاقة وعكس العلاقة، فمثلاً (......أب......) عكس (.....ابن.....) لكن سلب العلاقة (......أب......) هو الإتيان بنقيضها أو إنكارها فالقضية (أ. أب . ب) سلبها (أ ليس أب ب)[٣٧] .

وبالنسبة لاستخدامه الرموز فإن أهم ما يميز هذه العملية هو إشارته إلى الاستغراق في القضية، فمثلا إذا كانت هناك قضيه موضوعهاX ومحمولها Y، نجده يشير إلى الحد X إذا كان مستغرقاً بكتابه شق قوس قبل أو بعد هذا الحد بحيث يشير طرفي القوس إلى ناحية هذا الحد. على هذا النحو (X أو X)، أما إذا كان الحد غير مستغرق فإننا نشير إليه بالقوس إما قبل أو بعد هذا الحد بحيث يكون طرفي القوس يشيران بعيداً عنه مثل X) أو X (ومن هنا تشير الرموز Y ((X إلى قضية موضوعها X مستغرق ومحمولها Y غير مستغرق بمعنى أن كل X هي Y.

وقد استخدم الرمز X o Y ليشير إلى قضيه حديها غير مستغرقين بمعنى أن بعض X يكون Y.

---

(٣٧) د. محمود فهمي زيدان : المنطق الرمزي ، نشأته وتطوره، ص ٦٧

وكان يرمز إلى نفى الحد X ب x الحرف الصغير ونفى الحد Y بـ y. وكان يشير إلى القضية السالبة بنقطة توضع بين منحيي القوس فمثلاً القضية، بعض X لا تكون Y سوف تكون رمزياً (Y . X) ، وكان يشير بوجود نقطتين أو عدم وجودهما إلى القضية الوجبة[٣٨].

لقد استطاع دي مورجان أن يظهر المنطق التقليدي على أنه منطق علاقات. وعلى الرغم من أن المصطلح الرمزي لديه كان معقداً أو مركباً لذلك لم يأخذ به أحد. لكن هذا لا يقلل من شأن إسهاماته التي ستفيد المناطقة من بعده في إقامة نظريات جديدة لم يعرفها هو مثل حساب القضايا وحساب المحمول[٣٩].

(38) C.I. Lewis, OP. Cit, P38

(٣٩) د. محمود فهمي زيدان : المرجع السابق ، ص ٧٢٠

٣ - جورج بول (١٨١٥- ١٨٦٤)

هو عالم رياضي ومنطقي إنجليزي ولد عام ١٨١٥ وكانت آراؤه بمثابة حلقة هامة من حلقات تطور الفكر المنطقي في جانبه الرياضي.

لقد كان بول مهتما بالتمثيل الرمزي للمنطق ذلك التمثيل الذي كان أرسطو هو أول من حقق وبحث فيه[٤٠]، لكن بول هو أول من قدم نسقا للمنطق الرياضي ذلك النسق الذي احتل مكانة خاصة ومميزة في تاريخ المنطق الرياضي[٤١].

ومن بين أهم الدراسات التي توضح أهمية بول في تاريخ المنطق المعاصر المقال الذي نشره عام ١٨٤٤ بعنوان " منهج عام في التحليل **A general Method Of Analysis** والذي أسهم به في تعميم التفكير البرهاني الجبري، وكذا كتابه "التحليل الرياضي للمنطق **Mathematical Analysis Of Logic**" الذي نشره عام ١٨٧٤ . وكتاب "فحوص في قوانين الفكر . **Investigations Of The Law Of Thought** " عام ١٨٥٤ - فضلاً عن مجموعة من الدراسات التي قام بها في مجال حساب الاحتمالات[٤٢].

لقد حاول بول أن يستفيد من دراسته للرياضيات التي اشتغل بها وقتاً طويلاً، فأعمل فكره الرياضي في المنطق ثم وقف على حقيقة مفادها أنه يمكن للمنطق أن يتطور تطوراً جذرياً إذا ما كانت لغته دقيقة ومصاغة صياغة غاية في الإحكام والترابط بحيث

---

(40) A. Potton, An Introduction to Digital Logic, Macmillan New York ,1973, P17

(41) I.M. Bochenski, A History of Formal Logic. Translated and edited by Ivo Themas, Chelsea Publishing Company, New York، 1970, P296

(٤٢) د. عزمي إسلام : أسس المنطق الرمزي ، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة ،١٩٧٠ ص ٢٣

تسمح للفكر أن يتحرك في إطارات وأبعاد المنطق وهو مسلح بوسيلة فنية تعصمه من الخطأ[٤٣].

وقد سجل بول أفكاره حول هذا الموضوع في كتابه المشهور "التحليل الرياضي للمنطق" ليكون محاولة لخلق الجبر المنطقي أو المنطق الجبري[٤٤].

فقد كان من الواضح أنه من الأغراض الرئيسية التي يذكرها بول هي التوصل إلى قوانين الفكر والتعبير عنها بلغة رمزية دقيقة حتى يتسنى الوصول إلى المنطق ومنهجه ، والجدير بالملاحظة هنا أنه لم يقر باللغة الجارية كوسيط دقيق للتعبير عن الفكر ؛ فكان لابد من اللجوء إلى اللغة الرمزية التي تحقق دقة التعبير عما أطلق عليه اسم "قوانين الفكر"[٤٥]، لذلك فهو في كتابه "قوانين الفكر حاول أن يستفيد من العمليات الجبرية والتقنيات الرياضية لبناء نظريته في المنطق[٤٦].

فالرياضيات في نظر بول لا تدرس المقادير العددية أو الجبرية فقط، لكنه تصور إمكان تطويرها بحيث تكون معبرة عن كل عمليات الفكر وقوانينه، بما في ذلك قوانين المنطق[٤٧]، من هنا أراد بول إقامة منطق على نموذج علم الجبر يستخدم حروف الهجاء رموزاً وعلامات العمليات الحسابية كالجمع والضرب ... الخ ، وأيضاً إقامة القضايا على صورة معادلات تعبر عن مساواة بين طرفيها، ثم يحاول من هذه استنباط قضايا أخرى.

---

(٤٣) د. على عبد المعطى محمد ، د. محمد محمد قاسم : المنطق الرياضي ، الأسس والتطور والنظريات ص١٤٨

(٤٤) أليس امبروز ، موريس لازيروفيتش : أوليات المنطق الرمزي ، ترجمة د. عبد الفتاح الديدى ، مطبوعات المجلس الأعلى للثقافة ، القاهرة ، ١٩٨٣ ، ص١٥٣

(٤٥) د. محمد مهران : مقدمة في المنطق الرمزي ، ص ٣٦

(46) P.H. Nidditch, The Development of Mathematical Logic, P40

(٤٧) د. عزمي إسلام : المرجع السابق، ص ١٣٦

فقد استخدم رموز اللغة مثل (هـ ، و ، ى) لتدل على موضوعات المفاهيم التي نستخدمها. وأيضاً استخدم العلامات الدالة علـى عمليـات مثـل(+، – ،÷ ،×) حيـث يتـم بواسطتها تركيب الرموز اللغوية في أقوال ذات مغزى، أما علاقة الهوية (=) فإن بول يعدهـا علاقـة أساسية[٤٨].

ولم يستخدم بول الرموز فحسب، بل كان يهدف إلى القوانـين التـى علـى أساسـها تـتركب هذه الرموز، لذلك فهو يحدد خاصيـة أي حسـاب صحيح للمنطـق بأنـه منـهج يقـوم علـى استخدام الرمـوز– تلـك الـتي تكـون قوانـين تركيبـها معروفـه وتسـمح نتائجـها بتفسـير متسق[٤٩]. حيث كتب يقول في مقدمة كتابه (التحليل الرياضي للمنطق) "إن هـؤلاء الملمين بالوضع الراهن لنظرية الجبر الرمزي يعلمون أن صحة عملية التحليل لا تعتمد فقط علـى تفسير الرموز المستخدمة بل تعتمد أيضاً على قوانين تجمعاتها[٥٠]".

أما عن المنهج الذي استخدمه بول فإنه يعتمد على ثلاث أفكار رئيسية وهى:–

١ – تصوُّر الرموز المختارة.

٢ – قوانين الفكر التي يمكن التعبير عنها كقواعد للعمليات التي تقوم على هذه الرموز.

٣ – مراعاة أن هـذه القواعـد هـي نفسـها الـتي تصـدق في جـبر الأعـداد "الصفـر والواحـد الصحيح"[٥١].

وقد نشر بول بحثاً عن حساب المنطق في مجلـة رياضيـة وهـى مجلـة **Mind** عـدد أبريل ١٩٤٨، حيث ختمه بعبارة تلخص موقفه إذ قال " إن الرأي الـذي أعرضـه في هـذه الأبحاث عن طبيعة اللغة جدير بالاهتمام الشديد، فاللغة كمـا أعرضـها في هـذه الأبحـاث

---

(٤٨) د. محمد مهران : مقدمة في المنطق الرمزي ، ص ص٣٦ ، ٣٧

(٤٩) نفس المرجع ، ص ٣٧

(50) **Paul Edward, The Encyclopedia of Philosophy,V3, P 552**

(51) **C.I. Lewis, A Survey of Symbolic Logic, P52**

ليست مجرد مجموعه مـن رمـوز بـل هـي نسق مـن العبـارات تجـرى عناصرهـا (إتصـالاً وإنفصالاً) وفق قوانين وهى قوانين الفكر، والنتيجة التي لا أتردد في تعريضـها للنقـد هـي أن هذه القوانين (التي تتركب بمقتضاها العبارات الكلامية) رياضية بمعنى هـذه الكلمـة الدقيق فهى كالقوانين التي تتمثل في المدركات الكميـة الخاصـة الـتي نتصورهـا عـن المكـان والزمان والعدد المقاييس(٥٢).

إن وجود جبر خاص بالموضوعات التي ليست أعداداً من أهم الكشـوف الـتي توصـل إليها بول في ميدان المنطق الرمزي لكن محاولته هذه كـانت محصـورة في نظريـة الفئـات ، فهو أول من قدم مناهج لعمليات تقوم علـى أسـاس المتغيرات الـتي تقـوم مقـام الحـدود أو الفئات ، وكانت تلك العمليات شبيهة بالمنـاهج الجبريـة المألوفـة الـتي تقـوم علـى أسـاس المتغيرات التي تقوم مقام الأعداد(٥٣).

وعلى الرغم من أن بول كان مـهتماً في نظريتـه المنطقيـة بتطبيـق تصـورات جبريـة وتطويرها أكثر من اهتمامه بتحليـل التصـورات المنطقيـة الخالصـة ، حيـث كـان كريـاضي يغلب الجانب الرياضي على الجانب المنطقي، الأمر الذي انتهى به إلى تصـور المنطـق علـى أنه دراسة فرعية لعلم أصلى هو الرياضيات ، نقول على الرغم من ذلك أن جبر المنطق الذي إكتشفه بول كان مفيداً إلى حد بعيـد في حـل المشـاكل المتعلقـة بعلاقـات الفئـات ذات القـدر الكبير من التعقيد(٥٤). وأيضاً قد استطاع أن يبين لنا أن نظرية القياس التقليدية التي كـانت حتى ذلك الوقت مرادفة– من الناحيـة العمليـة– للمنطـق الاسـتنباطي – يمكـن أن تكـون مجرد مثال جزئي خاص لنوع من الجبر المنطقي . بـل أصبـح جـبر بـول بـدوره بعـد ذلـك مجرد نوع من الحسابات الرمزية – التي تشكل هيكل المنطق(٥٥).

---

(٥٢) د. زكى نجيب محمود : المنطق الوضعي ، الجزء الأول ، ص ص ١٧٩ ، ١٨٠

(٥٣) د. محمد مهران : المرجع السابق ، ص ٣٥

(٥٤) أليس امبروز ، موريس لازيروفيتش : المرجع السابق ، ص ١٧٩

(٥٥) د. محمد مهران : المرجع السابق ، ص٣٧

٤ - جوتلوب فريجه (١٨٤٨ – ١٩٢٥)

لم يكن الاهتمام بكتابات فريجه في المنطق كافيا حتى صدور كتاب برتراندرسل Principles Of Mathematics ذلك الكتاب الذي أقام لكتابات فريجه وأعماله اعتبارا كبيرا، ووضعها موضع التقدير(٥٦).

وكان أحد الأسباب التي أدت إلى إهمال كتابات فريجه هو استخدام الرموز المتعلقة بكتابة القضايا، حيث لم تكن في الاتجاه الطبيعي لها أي من اليسار إلى اليمين، ولكنها كانت من أعلى إلى أسفل مما يجعل قراءة هذه الرموز أكثر صعوبة(٥٧).

لقد أدرك فريجه العلاقة الوثيقة بين الرياضيات والمنطق. وقد أثبتت أعماله أن هناك تطويرا شاملا في الحساب من خلال منهج المنطق الصوري(٥٨) .

فعلم الحساب ما هو إلا منطق متطور حيث أن كل قاعدة فيه ما هي إلا قانون منطقي، فنظرية الأعداد التي تؤلف القاعدة الأساسية لعلم الحساب ما هي إلا امتداد للمنطق(٥٩).

وإذا كان العدد هو أحد المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات . فمن الضروري أن نبحث في هذا المفهوم حتى نتغلب على المشكلات التي قد تنتج عن هذا المفهوم(٦٠) .

أي أنه كان يرى أن المشكلة الرئيسية في علم الحساب هي كيفية تفسيره تفسيرا منطقيا وخاصة الأعداد(٦١). فالقوانين البسيطة للأعداد يمكن استنتاجها من خلال الوسائل المنطقية.

---

(56) P.H. Niddtich, OP. Cit. P 60

(57) Ibid, P 61

(58) C.I Lewis, A Survey Of Symbolic Logic. P.5

(٥٩) د. محمد محمد قاسم: جوتلوب فريجه، نظرية الإعداد بين الايستمولوجيا والأنطولوجيا، ص٤٧

(60) Paul Benaceraf, Frege, The Last Logicist, Reading From Frege's Philosophy of Mathematics, edited by William Demopoulos, London, England, 1997, P49

(61) Peter Geach & Max Black, Translations From The Philosphy of Gottlob frege, Basil Black Wall, Oxford, 1980, P 224

فقد استند فريجه في صياغة نظريته عن الأعداد إلى بعض الأسس والأفكار المنطقية، فقد وجد أنه توجد علاقة بين العدد من ناحية والمفهوم والماصدق من ناحية أخرى، فعند تعريف الأعداد يجب أولاً أن نلجأ إلى استقراء جميع الأفراد الداخلة في ما صدق شيء ما لكي نعرفه. ولأنه من المستحيل تطبيق هذه الفكرة عندما يكون العدد لا يمكن حصره أي لامتناهي. ومن ثم فلابد من تعريف العدد بالمفهوم أي بخاصية مشتركة بين جميع الأعداد. وبذلك نحل مشكلة اللانهائية حيث لا حاجة إلى عد الما صدقات . ومن ثم فان الأعداد تشير إلى تصورات ولا تشير إلى أفراد(٦٢).

ومن أهم إسهامات فريجه أيضاً إدخاله فكرة الدالة إلى مجال المنطق، ولكي نفهم كيفية تطبيقه فكرة الدالة في الرياضيات على علم المنطق يجب أولاً أن نتعرف على مفهوم الدالة عنده. وهو يعرفها كما يلي:-

"افرض أن لدينا رمزاً بسيطاً أو مركباً في مكان واحد أو أكثر في تعبير ما، فإذا تخيلنا إمكان استبدال هذا الرمز بآخر في مكان أو أكثر، فإن الجزء من التعبير الذي يظل باقياً في حالة الاستبدال نسميه (دالة). والجزء الذي يمكن استبداله نسميه " حجة الدالة Agreement Of The Function"

فمثلاً : ٢س^{٢} + س فإن الدالة هي ما يبقى من التعبير بعد استبعاد السينات أي ٢ ( )^{٢} + ( ) والحجة هي ما يوضع في المكان الخالي فمثلاً :

٢ (١)^{٢} + ١ = ٣ فنقول أن العدد ٣ هو قيمة الدالة ٢س^{٢} + س للحجة(١).

---

(61) Peter Geach & Max Black, Translations From The Philosophy of Gottlob frege, Basil Black Wall, Oxford, 1980, P 224

(٦٢) د. محمد محمد قاسم :جوتلوب فريجه، نظرية الإعداد بين الايستمولوجيا والأنطولوجيا، ص ص ٥٢، ٥٣

أي أن الدالة تكون دائماً في حاجة إلى حجة. ومن ثم فقد وصف فريجه الدالة في الرياضيات بأنها ناقصة ،لأنها تحتوى على مكان خالي. وتصبح الدالة تعبيراً تاماً إذا ملأ المكان الخالي بحجة محددة(٦٣).

وبالنسبة لقيمة الدالة فمن الممكن أن تكون صادقة أو كاذبة. وتسمى "قيمة صدق الدالة"، فمثلاً $(-١)^٢ = ١$ نلاحظ أن قيمة صدق هذه الدالة صادقة، أما $(٢)^٢ = ١$ فإن قيمة صدق هذه الدالة كاذبة.

وقد طبق فريجه فكرة الدالة في المنطق، حيث رأى أنه يمكننا النظر إلى القضية لا على أنها مؤلفة من محمول وموضوع، إنما على أنها مؤلفة من دالة وحجتها، حيث ربط بين المحمول والدالة، ويتضح ذلك من وجهتين، وذلك من خلال ربطه الدالة بقيمة الصدق، حيث يوجد لكل داله قيمة صدق. سواء صادقة أم كاذبة، ومن جهة أخرى من ربطه المحمول بقيمة الصدق ، فإذا كانت القضية تحتمل الصدق أو الكذب ، فإن ذلك كائن في أن المحمول يستند إلى الموضوع إيجاباً (صدقاً) أو سلباً (كذباً) ، أي أن المحمول هو الذي يحدد صدق القضية أو كذبها.

أي أن فريجه قد ربط الدالة بقيمة الصدق، كما ربط الصدق بالمحمول. ومن ثم ربط فريجه بين الدالة والمحمول(٦٤).

وقد رأى فريجه أنه من الضروري وضع أسس منطق الاستنباط حيث أراد للمنطق أن يكون نسقاً استنباطياً، له أفكاره اللامعرفة وتعريفاته ومصادراته التي يجب أن توضع صريحة منذ البدء .

ويتكون النسق الاستنباطي عند فريجه من أفكار أولية – وتعريفات – فمصادرات أو مبادئ يستنبط منها النظريات ، مستعيناً في ذلك بقواعد الاستدلال .

---

(٦٣) د. محمود فهمي زيدان : المنطق الرمزي ، نشأته وتطوره ، ص ١٤٥

(٦٤) نفس المرجع ، ص ص ١٤٥ ، ١٤٦

١- الأفكار الأولية [٦٥]

أي الأفكار اللامعرفة وهى ما كانت أكثر وضوحا وبساطة.ومن ثم فهي الأسبق منطقيا على غيرها من قضايا النسق.ويقدم فريجه فكرتين أوليتين هما :-

أ - فكرة السلب : Negation. ويرمز لها فريجه بالرمز (–) ومعناها (من الكذب أن).

ب - فكرة اللزوم : Implication ورمزها لديه (⊢) وتشير إلى علاقة السابق باللاحق في القضية الشرطية المتصلة.

٢- التعريفات

قدم فريجه تعريفات لثوابت الفصل، الوصل، المساواة، حيث عرف دالة الفصل بأنها القضية التي تصدق إذا صدق أحد عنصريها أوكلاهما معاً.

وعرف دالة الوصل بأنها تصدق إذا صدق عنصراها معاً . وتكذب إذا كذب أحد عنصريها على الأقل.

وعرف دالة التكافؤ (المساواة) بأنها تصدق عندما يمكن إبدال مواضع عنصريها ببعضها دون إخلال بالصدق[٦٦].

٣- المصادرات (البديهيات)

حيث وضع فريجه أكثر من مجموعة من البديهيات في سياقات مختلفة ونقتصر هنا على ذكر إحداها، وسوف نستخدم المصطلح الرمزي لبيانو في التعبير عن مجموعة مبادئ فريجه، وتتألف هذه المجموعة من سبع بديهيات.

١- ق ⊃ (ل ⊃ ق)

---

(٦٥) د. محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزى ، بحث فى الحساب التحليلى والمصطلح، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية ١٩٩٦، ص١٤٢

(٦٦) د. محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي، نشاته وتطوره، ص١٤٢

$$p \supset (q \supset p)$$

ونقرؤها. القضية (ق) تستلزم القضية المركبة (ل يلـزم عنـها ق). أو إذا كـانت (ق) صادقـة لزم عنها أنه إذا صدقت (ل) تصدق (ق).

٢ - [ق ⊂ (ل ⊂ م)] ⊂ [(ق ⊂ ل) ⊂ (ق ⊂ م)]

$$[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$

٣ - [ق ⊂ (ل ⊂ م)] ⊂ [ل ⊂ (ق ⊂ م)]

$$[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$$

٤ - (ق ⊂ ل) ⊂ (- ل ⊂ - ق)

$$(p \supset q) \supset (-q \supset -p)$$

٥ - - ق ⊂ ق

$$--p \supset P$$

٦ - ق ⊂ - - ق

$$p \supset --p$$

٧ - هـ ⊂ (جـ) ⊂ د (و)[٦٧]

ويستخدم فريجه هذه المباديء كمقدمـات أولى للبرهـان علـى نظريـات منطقيـة أو لاشـتقاق قضايا جديدة منها ، ولكي يتم إستنباط نظريات أو قضايا جديدة من تلك المقدمـات الأوليـة يلزم الاستعانة بقاعدتين للاستدلال هما قـاعدة التعويـض. **Rule of substitution**. وقاعدة إثبـات التـالي **Rule of detachment** أو مـا أسمـاه التقليديـون **Modus ponens**[٦٨].

(٦٧) د. محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي ، ص ١٤٣

(٦٨) د. محمود فهمي زيدان : المرجع السابق ، ص ١٥٦

وبالنسبة لقاعدة التعويض. فتنص على أن نجرى تعويضاً عن صيغة محددة بصيغة مكافئة لها بالتعريف حتى يتسنى لنا إجراء اشتقاق بعينه فمثلاً نجد أن:-

(ق ⊂ ل) ≡ (− ق V ل)

(− ق V ل) ≡ (− ل ⊂ − − ق)

وعند إجراء التعويض. نحصل على

(ق ⊂ ل) ≡ (− ل ⊂ − ق)[٦٩]

أما قاعدة إثبات التالي فتنص على ما يأتي[٧٠]

أ. [(ق ⊂ ل) . ق] ⊂ ل

ب − $$\frac{\text{هـ س}}{\text{(هـ) هـ س}}$$

جـ − $$\frac{\text{ق د ق س}}{\text{ق د (هـ) هـ س}}$$

أما عن استخدام الرموز فقد استخدم فريجه رموزاً من ابتكاره توخياً للدقة والصرامة، وكانت لغته الرمزية ضرورة للدقة في التعبير والتكامل فيما يقيم من استدلالات ، وقد ارتبطت نشأة الرموز لديه بمحاولة التمييز بين اللامعرفات والمعرفات من الأفكار المنطقية الأولية وما يتعلق بذلك من متغيرات وثوابت وصور القضايا وبيان القدرة على صياغة تعريفات للروابط المنطقية. كما عبرت الرموز بدقة ووضوح عن البديهيات وقوانين وقواعد الاستدلال[٧١].

---

(٦٩) د. محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزى ، ص١٤٤

(٧٠) نفس المرجع ، ص ١٤٤

(٧١) د. محمد محمد قاسم : جوتلوب فريجه ، نظرية الأعداد بين الايستمولوجيا والانطولوجيا ، ص٤٣

ورغم اصطناع فريجه للرموز مما زاد من قدرته على التحليل، فقد رأى البعض في لغته الرمزية صعوبة ظاهرة حالت دون انتشار آرائه ونظرياته. ومن هؤلاء برتراند رسل الذي يعترف بصعوبة جمة واجهته عند قراءته للجزء الأول من" القوانين الأساسية لعلم الحساب " للمرة الأولى(٧٢).

فقد كان يستخدم حروف الهجاء اليونانية، وخطوط أفقية ورأسية برسوم معينة. ولكل رسم منها معنى بحيث تطول الخطوط وتقصر ولكل دلالته. كما تتخلل تلك الخطوط أقواس لها دلالات معينه أخرى(٧٣).

لكن بالرغم من ذلك فإن فريجه بجهازه الرمزي ونظرياته المنطقية ونسقه الإستنباطى قد أثار إنتباه المعاصرين له واللاحقين عليه من المناطقة، فراحوا يدرسون ويطورون تراثه المنطقي الضخم. ويعرضون نظرياتهم في ضوء ما ينسب إلى فريجه من مباديء وأسس منطقية(٧٤).

---

(٧٢) نفس المرجع ، ص٤٣

(٧٣) د. محمد فهمي زيدان: المنطق الرمزى – نشأته وتطوره، ص ص ١٥٠، ١٥١

(٧٤) د. محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي ، ص١٥٦

٥ - بيانو (١٨٥٨ - ١٩٣٢)

لقد دخل بيانو إلى المنطق من باب الرياضيات وذلك حين كان يشرح طبيعة البرهان الرياضي وتعريفه للأعداد. حيث كان يصطنع استدلالات لها طابعها المنطقي الخالص(٧٥)، فقد كان يرى أن قيمة ما هو مطروح من براهين من حيث كونها جيدة أو غير جيدة .... يجب ألا تكون خاضعة للذوق أو المشاعر الداخلية لكنها قيمة يجب أن تكون خاضعة لمضمون ومحتوى البرهان من حيث احتوائه على خاصية الصدق التي يمكن اختبارها(٧٦)، فقبول القضية الرياضية لا ينبغي أن يقوم على تقبل الحدس لها ، وإنما على قابلية اشتقاقها من مقدمات وتعريفات(٧٧).

وقد نظر بيانو إلى المنطق على أنه أداة أو وسيلة للوصول إلى استدلال أو استنباط واضح ودقيق ومحكم في الرياضيات(٧٨).

ومن هنا قام بيانو بنصيب ملحوظ في حركة الاتجاه اللوجستيقى، أي رد التصورات الأولية لعلم الحساب إلى تصورات منطقيه خالصة.

لقد كانت طريقة تقديم بيانو للحساب شيئاً مهما في التطورات اللاحقة- وقد اعتمد هذا التقديم على مجموعة من المسلمات المعروفة بديهيات بيانو **piano axioms** وكان القصد من وراء هذه البديهيات هو تحرير مفهوم العدد من الاعتماد على الحدس(٧٩)،

---

(٧٥) د. محمود فهمي زيدان : المنطق الرمزي–نشأته وتطوره، ص١١٦

(76) P.H. Nidditch, OP. cit, P74

(77)Proir A. N., Modern Logic: Frege to the present, in the Encyclopedia of philosophy, Vol. 3, by Paul Edward, P.552

(78) P.H. Nidditch, Op. cit, P 73

(79)Proir A. N., Modern Logic: Frege to the present, in the Encyclopedia of philosophy, Vol. 3, by Paul Edward, P556

وتخليص علم الحساب من عيوبه وصياغته كنسق استنباطي اعتمادا على ثلاثة أفكار أساسية (لا معرفة) وخمس مصادرات[٨٠].

أما الثلاثة أفكار اللا معرفة فهي :-

أ) الصفر.

٢) العدد الصحيح المتناهي.

٣) التالي

أما المصادرات فقد كتبها بيانو للمرة الأولى عام ١٨٨٩ على أساس أن "الواحد" أول الأعداد. ثم أعاد صياغتها فيما بين عامي ١٨٩٥-١٩٠٨ وجعل "الصفر" هو أول الأعداد، وصاغها على النحو التالي:-

١- الصفر عدد

٢- التالي لأي عدد عدد

٣- إذا كان لعددان نفس التالي، فالعددان متطابقان.

٤- الصفر ليس تالياً لأي عدد

٥- إذا كان (س) فئة ينتمي إليها "الصفر"، وكذلك التالي لأي عدد ينتمي إلى (س) فيترتب على ذلك أن كل عدد ينتمي إلى (س)[٨١]، وهذه المصادرة معناها .. أنه أي خاصية property من خواص الصفر هي بالضرورة خاصية لجميع الأعداد[٨٢].

---

(٨٠) د. محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي – بحث في الحساب التحليلي والمصطلح ، ص ١٣٩

(81) Kneal W. And M kneal, the Development of Logic, Clarendon press, Oxford, London, 1962. P473

نقلاً عن . د. محمد مجمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي ، بحث في الحساب التحليلي والمصطلح ، ص١٣٩

(٨٢) د. على عبد المعطى ، د. محمد محمد قاسم : المنطق الرياضي ، الأسس والتطور والنظريات، ص ١٦٥

وتحت تأثير الرياضيات حاول بيانو أن يجعل المنطق نسقاً إستنباطياً، حيث يضع من البداية طائفة من الحدود اللامعرفة ، والتعريفات والمصادرات، بحيث تصبح النظريات المنطقية إستنباطاً محكماً من تلك البدايات[٨٣].

ويمكن الإشارة إلى عناصر هذا النسق عند بيانو فيما يلي.

١ – أفكار أولية

وهى مجموعة من الأفكار الواضحة بذاتها لبساطتها، وتستخدم في تعريف بقية الأفكار. وهذه الأفكار الأولية هي: فئة – حد – عضوية الفرد في فئة ينتمي إليها – تضمن صوري – تعريف – سلب – تقرير قضيتين معاً[٨٤].

٢ – التعريفات[٨٥]

حيث يصوغ بيانو أربعة تعريفات مستعيناً بالأفكار الأولية. وهذه التعريفات هي:-

١- إذا كان (أ) يرمز إلى فئة، (هـ)، (و) ترمز إلى أعضاء في فئات. فإن (هـ) ، (و) ينتميان إلى (أ). أي أن (هـ) عضو في (أ) ، (و) عضو في (أ).

٢ – إذا كان (أ) ، (ب) رموزاً لفئات – فإن قولنا "كل أ هو ب " يعني أن [(هـ هو أ) يلزم عنها (هـ هو ب).

٣ – إن الضرب المنطقي بين فئتين (أ ، ب) ينتج عنه عدد الأفراد الأعضاء في الفئتين (أ ، ب) معاً . أي أعضاء الفئة (أ ب).

٤ – الفئة الفارغة محتواه في كل فئة.

(٨٣) د. محمود فهمي زيدان : المرجع السابق ، ص ١٢٠

(٨٤) برتراند رسل :. أصول الرياضيات، الجزء الأول ، ترجمة د/ محمد مرسى أحمد ، د. أحمد فؤاد الأهوانى ، دار المعارف بمصر ، القاهرة ١٩٦٥ ، ص٦٦

وأيضاً د. محمد محمد قاسم، نظريات المنطق الرمزي ص ص. ١٣٩، ١٤٠

(٨٥) د. محمد محمد قاسم، المرجع السابق، ص ١٤٠

٣ – القضايا الأولية (البديهيات)[86]

القضايا الأولية Primitive Propositions هي قضايا نقبلها بلا برهان ونستخدمها لاستنباط قضايا أخرى منها " وقد وضع بيانو خمس قضايا أولية تشكل عصب الاستنباط في المنطق وهي:

١ – كل فئة محتواه في ذاتها.

٢ – الضرب المنطقي بين فئتين ينتج عنه فئة جديدة.

٣ – ناتج الضرب المنطقي بين فئتين محتوى في كل فئة منهما.

فإذا كان أ ، ب رمزين لفئتين ، فإن ناتج الضرب بينهما (أ ب) محتوى في الفئة (أ) كما أنه محتوى في الفئة (ب).

٤ – صورتان من القياس كلاهما قضية أولية.

أ – إذا كان (أ) ، (ب) ، (جـ) فئات . وكان (أ) محتوى في (ب) وكان (هـ) عضواً في (أ) فإن (هـ) عضو في (ب).

(ب) إذا كان (أ) ، (ب) ، (جـ) فئات . وكان (أ) محتوى في (ب) وكان (ب) محتوى في (جـ) . فإن (أ) محتوى في (جـ).

٥ – مبدأ الاستدلال أو التركيب .

وقد استعان بيانو بما وضعه من أفكار أولية وتعريفات وقضايا أولية في وضع نسق استنباطي يصلح للتطبيق على كل النظريات المنطقية التي شارك في بنائها وهى نظريات حساب القضايا وحساب المحمول. وحساب الفئات.

وقد استخدم بيانو في نسقه الاستنباطي مصطلحاً رمزياً غايةً في السهولة والبساطة، بحيث يسهل على القاريء فهم دلالاته ومتابعته.

---

(٨٦) نفس المرجع ، ص ص ١٤٠ ، ١٤١

فهو حين يشرح نظرية الاستنباط أو حساب القضايا . يعطي الرموز P ، Q ، R ، S لتعبر كلٌ منها عن القضية ككل دون تمييز بين حدودها.

كما أنـه وضع للثوابت المنطقية رموزاً . حيث رمز إلى السلب بالعلامة (~) والربط بالعلامة (٠) وإلى الفصل بالعلامة (V) ،واللزوم بالعلامة (⊃)، وإلى التكافؤ بالعلامة (≡).

وعندما كان يشرح نظرية الفئات كان يجعل الحروف الأولى a , b , c رموزاً لفئات. ويرمز إلى العضو في فئة بالحروف الأخيرة X ,Y , Z وكان يرمز إلى عضوية الفرد في فئة بالعلامة (∈) وإلى احتواء الفئة في أخرى بالعلامة (⊂)، وكان يرمز للدالة بالرمز (F) وإلى دالة القضية بالرمز (X) F . وإلى السور الكلى بالرمز (X) وإلى القضية الكلية بالرمز(X) F (x). وإلى السور الوجودي بالرمز(∃X)[٨٧]

والواقع أن أغلب هذه الرموز وعدداً ليس بصغير من العلامات الأخرى التي وضعها بيانو قد أصبحت علامات متعارف عليها في المنطق الرياضي. وذلك بعد استخدام وايتهد ورسل لها[٨٨].

إن مهارة بيانو الرياضية ودقته المنطقية قد دفعته إلى معالجة بعض القضايا المنطقية من منظور جديد مما أدى إلى تطور المنطق.

فالمنطق الرياضي عند بيانو يقوم بدراسة خواص عمليات المنطق وعلاقاته[٨٩]. وموضوعه هو صياغة أبسط نسق من المفاهيم المنطقية صياغة تجعل منه شيئاً ضرورياً وكافياً لتمثيل الحقائق الرياضية وبراهينها تمثيلاً رمزياً[٩٠].

---

(٨٧) د. محمود فهمي زيدان : المرجع السابق ، ص ص ١١٩ ، ١٢٠

(88) P.H. Nidditch, the development of mathematical logic, P 76

(٨٩) د. محمد مهران : مقدمة في المنطق الرمزي ، ص٦٣

(٩٠) د. عزمي إسلام : أسس المنطق الرمزي ، ص ص ١٥ ، ١٦

تعقيب

إن التطور الذي لحق بالرياضيات في القرن التاسع عشر، أدى إلى تطور مماثل في مجال علم المنطق، فالنقائض التي ظهرت في الرياضيات نتيجة للاعتماد على فكرة الحدس المكاني تبين إنها ذات طبيعة منطقية وليست رياضية. ومن هنا وجدت الرياضيات نفسها مسوقة بالضرورة عند التماس اليقين إلى الاستعانة بقواعد المنطق. لذلك فقد تحولت طريقة البحث في الرياضيات من محاولة دراسة المسائل الرياضية مسألة مسألة إلى البحث في الأسس البعيدة التي تقوم عليها الرياضيات وإقامتها على أساس من المنطق .

فقد رأى الرياضيون أن التصور الجديد لبناء الرياضيات يجب أن يقوم على أسس لا يتطرق الشك إليها وذلك باللجوء إلى المنطق.

الأمر الذي أدى إلى محاولة توسيع مفهوم المنطق (فالمنطق الأرسطى لم يكن بالشكل الذي يستطيع أن يقدم أساسا تقوم علية الرياضيات) ، وذلك بالتعبير عن قضاياه بلغة الرياضيات أي التعبير عن قوانينه باستخدام الرموز ، وجعله نسقاً استنباطياً.

معنى ذلك إن فكرة منطقة الرياضيات أدت إلى تطور علم المنطق . وقد ساهم في هذا التطور العديد من علماء الرياضيات والمنطق.

فقد حاول " جورج بيكوك " تقديم جداول تضم تفسيراً منطقياً للعمليات المستخدمة في الجبر.

وقد اهتم كل من "دي مورجان" و"جورج بول" بالتمثيل الرمزي لقوانين المنطق.

كما ساهمت أبحاث فريجه وخاصةً كتابه المسمى "القوانين الأساسية لعلم الحساب" في البرهنة على أن الأسس التي تقوم عليها الرياضيات هي أسس منطقية.

وأما "بيانو" فقد اعتمد على المنطق في إقامة استدلالات دقيقة ومحكمة في الرياضيات ، وأيضا حاول إقامة المنطق نسقاً استنباطياً.

أما أبحاث "برتراندرسل" فكانت بمثابة فاتحة لعهد جديد في التطورات المنطقية، فلم يقف رسل فقط عند مرحلة اشتقاق الرياضيات من المنطق . لكنه قام بتوضيح وتطوير العديد من المفاهيم المنطقية التي كانت موجودة عند السابقين عليه . ليس هذا فحسب . بل أيضا قيامه بابتكار نظريات ومفاهيم منطقية جديدة والتي ضمنها كتابه الشهير " برنكيبيا ماتيماتيكا " الذي ألفه بالاشتراك مع زميله "وايتهد". وقد خصص الباحث الفصل التالى لتوضيح أهمية هذا الكتاب وعرض بعض الموضوعات المنطقية التي تناولها رسل فيه.

الفصل الثانى

برتراند رسل ونسق البرنكيبيا

محتويات الفصل الثاني

تمهيد

أولاً : وصف كتاب "برنكيبيا ماتيماتيكا" .

ثانياً : أهمية كتاب "برنكيبيا ماتيماتيكا" ودور رسل فيه.

ثالثاً : الرموز المستخدمة في كتاب "برنكيبيا ماتيماتيكا".

رابعاً : ترقيم المبرهنات في نسق البرنكيبيا

خامساً : الموضوعات المنطقية في الكتاب

أ – موقف رسل من بحث القضايا

ب – نظرية حساب القضايا

ج – نظرية حساب دالات القضايا

د – نظرية الأوصاف

هـ – نظرية حساب الفئات

و – نظرية الأنماط المنطقية

ى – نظرية حساب العلاقات

تعقيب

تمهيد

من المؤكد أن من يهتم بمنطق برتراند رسل قد ألقى نظرة على كتاباته الرائعة في هذا المجال ، ولا سيما رائعته التي كتبها بالاشتراك مع زميله " الفرد نورث وايتهد " وهي كتاب Principia mathematica برنكيبيا ماتيماتيكا وقد ظهر الكتاب في ثلاثة مجلدات. (المجلد الأول عام ١٩١٠ ، والمجلد الثاني عام ١٩١٢ ، والمجلد الثالث عام ١٩١٣).

لقد أحدث ذلك الكتاب تطوراً هائلاً في مجالي المنطق والرياضيات على حد سواء، لذلك فهو يمثل قيمة تاريخية للموضوعات التي يعالجها، بحيث يمكن القول بأن المنطق الرياضي يؤرخ له بما قبل وما بعد البرنكيبيا.

لقد كان الهدف من وراء تأليف هذا الكتاب هو تأسيس الرياضيات على أساس من المنطق، وذلك بإضفاء الطابع الصوري عليها وأيضاً إستخدام الرموز المستخدمة في الرياضيات للتعبير عن قضايا المنطق ليس هذا فحسب بل أيضا استخدام رموز جديدة ودقيقة لا لأن الرموز التي كان يستخدمها الآخرون بها عيوب . بل لمعالجة موضوعات لم يكن لها صياغة رمزية قبل ذلك . وكان ذلك بمثابة دفعة للمنطق والرياضيات إلى الأمام .

ففي هذا الكتاب استطاع رسل تطوير نظريات المنطق الرمزي الأربعة " حساب القضايا ، حساب دالات القضايا ، حساب الفئات ، حساب العلاقات " بأن وضع كلاً منها في نسق استنباطي على نحو لم نعهده عند السابقين عليه . وقام بابتكار نظريات لم تكن موجودة قبل ذلك مثل نظريتي الأوصاف والأنماط .

وقد خصص الباحث هذا الفصل لبيان الهدف من كتاب برنكيبياماتيماتيكا " وأهميته — ودور برتراندرسل فيه وعرض بعض الموضوعات المنطقية الموجودة فيه.

ويتكون هذا الفصل من العناصر الآتية :-

أولاً :- وصف كتاب "برنكيبياماتيماتيكا".

ثانياً :- أهمية كتاب "برنكيبياماتيماتيكا" ، ودور رسل فيه.

ثالثاً :- الرموز المستخدمة فى كتاب "برنكيبياماتيماتيكا".

رابعاً :- ترقيم المبرهنات في نسق البرنكيبيا

خامساً :- الموضوعات المنطقية في الكتاب

أ - موقف رسل من بحث القضايا

ب - نظرية حساب القضايا

ج - نظرية حساب دالات القضايا

د - نظرية الأوصاف

هـ- نظرية حساب الفئات

و - نظرية الأنماط المنطقية

ى - نظرية حساب العلاقات

أولاً: وصف كتاب "برنكيبيا ماتيماتيكا"

يتكون كتاب " برنكيبياماتيماتيكا " لرسل ووايتهد من ثلاثة مجلدات تضم أكثر من (٢٠٠٠) صفحة، لذلك فهو إذا كان كتاب عظيم من حيث الكيف فهو أيضاً عظيم من حيث الكم[1].

المجلد الأول يتكون من مقدمة وقسمين رئيسين ، تبدأ المقدمة من صفحة رقم (١) في الكتاب إلى الصفحة رقم (٨٤) وهي تضم مناقشة عامة ومفتوحة عن المقاصد والأهداف من الكتاب.

وتحتوى المقدمة على ثلاثة فصول، الفصل الأول منها ما هو إلا ملخص لما تم التوصل إليه بالتفصيل عن النسق المنطقي الذي يبدأ في الصفحة رقم (٩١)، أما الفصل الثاني من المقدمة فيتحدث عن نظرية الأنماط المنطقية والتي تعد شيئاً ضرورياً لمنع منطق البرنكيبيا من إن يصبح به تناقضات[2].

أما الفصل الثالث فهو في جوهره يعد شرحاً لنظرية الرموز الناقصة **Incomplete Symbols**[3].

وبالنسبة للقسم الأول من المجلد الأول فيقع تحت عنوان"المنطق الرياضي" وقد تحدث المؤلفان فيه عن نظرية إرتباطات القضايا وذلك في الصفحات من (٩٠-١٢٦)، ونظرية القضايا ذات المتغيرات في الصفحات من(١٢٧ – ١٨٦). ونظريتي الفئات والعلاقات بوصفهما جبراً في الصفحات من (١٨٧- ٣٢٦) أما القسم الثاني فيقع تحت عنوان "مقدمة في علم الحساب الحقيقي" وتتصل صفحاته بالأفكار اللازمة لوضع تعريف "العدد الأصلي" من خلال مبادئ المنطق[4].

---

(1) P. H Nidditch , the Development of Mathematical Logic , P 77

(2) Harold Newton Lee, Symbolic Logic, Rout Ledg & Kegan Paul Limited, London, P 300

(3) Ibid . P303

(4) P. H Nidditch, op. Cit., P 78

أما المجلدان الثاني والثالث من الكتاب فيخوضان في تفاصيل حساب الأعداد الأصلية والأعداد الترتيبية والذي يعتمد تماماً على المنطق(٥).

وبالنسبة للكتاب بصفة عامة فإنه توجد له طبعة ثانية. والنص الأساسي للطبعة الثانية لم يتغير عن الطبعة الأولى، إلا أن الفرق الوحيد بين الطبعتين هو المقدمة الطويلة في الطبعة الثانية والتي كتبها رسل بمفرده. والتي قد يكون من المفيد بالنسبة لقارئ الكتاب أن يتخطاها ويعود إليها بعد أن يكون لديه معرفة نقدية بالجزء الصوري البحت من الكتاب (٦).

---

(5) Ibid , P 78
(6) Harold Newton Lee , op . cit, p299

ثانياً: أهمية كتاب برنكيبياماتيكا – ودور رسل فيه

لم يكن دور برتراندرسل في تطوير أسس الرياضيات والمنطق دوراً يستهان به أو يهمله الباحثون، فقد كانت إسهاماته في هذا الجانب غاية في الأهمية . ولو لم يكن قد قدم لنا أعمالاً غيرها لضمنت له هذه الأعمال المكانة المرموقة التي يحتلها بين من عاصرهم من الفلاسفة، فعلى الرغم من أنة قد أثرى بإسهاماته كل فروع الفلسفة إلا أن إسهاماته في المنطق قد غطت على إسهاماته في الفروع الأخرى نظراً لأهميتها(٧)

فقد اهتم رسل في فترة مبكرة من حياته بالمنطق و الرياضيات، ورأى أنه توجد العديد من الأفكار الرياضية لم تلق القدر الكافي من التوضيح والتفسير.

فمثلاً كان يرى أن الطريقة المقررة في تدريس الحساب هي أن القواعد مبنية ومعلنة دون شرح وافي لأساسياتها، حيث يتعلم الطالب استخدام هذه القواعد بشكل فوري دون التفكير فيها(٨). فعندما يصل الطالب إلى الإجابة المطلوبة حتى يجد نفسه ممتلئ بشعور الارتياح النفسي لأنه ذلل صعوبات المادة، إلا أنه في نفس الوقت و في فهمه واستيعابه للعملية المستخدمة لا يكون قد حصل على الأغلب أي شيء من العلم(٩).

لذلك فان رسل يرى أنه سيكون من المفيد إعادة دراسة الرياضيات من جديد، وعدم التساؤل فقط حول مدى صحة قضية مطروحة من عدمه، لكن أيضا التساؤل عن كيفية اشتقاق هذه القضية من المبادئ الأساسية للمنطق(١٠)

---

(7) Robert E . Egner & Lester E . Denonn, the Basic Writings of Bertrand Russell, 1903- 1959, George Allen and unwin LTD, 1961, London P.27

(8)Bertand Russell , Mysticism and Logic , unwin Books , London, 1963, P60

(9) Ibid , P62

(10) Ibid , P62

لقد اشتد الجدل حول إمكانية استنباط الرياضيات من مبادئ منطقية. إلا أن المنطق الأرسطي لم يكن منطقاً شمولياً بالشكل الكافي والذي يقدم أساساً تقوم عليه الرياضيات، حيث كان منطقاً لفظياً بشكل أساسي و ذلك على العكس من الرياضيات فهي ليست لفظيه[١١].

ومن ثم فكان على رسل أن يقوم بعملية بناء جديد للمنطق . "حيث أراد رسل للمنطق أن يكون أكثر صورية ورمزية مما أتى عليه منطق أرسطو. كما أراد أن يجعله نسقاً استنباطياً وهو أمر لم يتح لأرسطو[١٢]. فقد وجد أنه من الممكن تجديد المنطق و الرياضيات معاً وأن قضايا الرياضيات يمكن إشتقاقها من قضايا المنطق حيث أن ضرورة وصدق الرياضيات هي نفسها ضرورة وصدق المنطق[١٣].

وكانت النتيجة لهذا هو ظهور ذلك النسق الذي قدمه رسل بالإشتراك مع "وايتهد" في كتاب قد يبقى هو الأثر الأعظم والأرقى والأكثر شهرة في تاريخ المنطق ألا وهو كتاب " برنكيبياماتيماتيكا **Principia Mathematica**[١٤].

لقد كتب رسل الجانب المنطقي من هذا الكتاب " أي كتاب برنكيبياماتيماتيكا " بينما كتب وايتهد الجانب الرياضي منه مع مراجعة كل منهما لما كتبه الآخر، حيث يقول رسل في هذا الصدد " يمكن القول إن وايتهد قد ترك لي المشكلات الفلسفية ، أما فيما يتعلق بالمشكلات الرياضية فإن وايتهد هو الذي ابتكر الجانب الأكبر من الرموز، إلا ما كان مأخوذاً عن بيانو ، لكنى قمت بالجانب الأكبر من العمل المتعلق بالتسلسلات ، وقام وايتهد بالباقي غير أن هذا لا ينطبق إلا على المسودات الأولى، لأننا أعدنا كتابة كل جزء من الأجزاء ثلاث مرات و كنا كلما ألف واحد منا مسودة أولى، أرسلها إلى الآخر الذي كان يعدل فيها إلى حد كبير، و بعد ذلك يقوم

(11) Harold Newton Lee , Symbolic Logic , Routlege & Kegan paul Limited , London , 1962 P.297

(١٢) د/ محمود فهمي زيدان . المنطق الرمزي . نشأته و تطوره .ص ١٧٦

(13) Charles A. FritZ, Bertrand Russell s' construction of the External World , Routledge & Kegan Paul , London , 1962 .P.9

(14) Susan. K Langer, An Introduction to Symbolic Logic, Dover Publication, INC , New York , 1967,P288

من كتب المسودة الأولى بصياغتها الصياغة الأخيرة، لذلك لا يوجد في المجلدات الثلاثة سطر واحد لم يكن إنتاجاً مشتركاً بيننا (١٥).

لقد تقدم رسل برأيه في هذا الكتاب، حيث كان يرى أن علم الرياضيات ما هو إلا نتاج للمنطق فكل أفكار الرياضيات تقدم براهين تستخدم دائماً القضايا الأولية و التعريفات و التي تعد جزءاً من المنطق(١٦).

وعلى الرغم من أن هذه الفكرة (أي فكرة اشتقاق الرياضيات من المنطق) قد وردت بالتفصيل في كتاب برنكيبيا ماتيماتيكا إلا أنها فكرة ليست جديدة تماماً حيث كانت جذورها موجودة في كتب بعض المناطقة والرياضيون الأول(١٧).

إلا أن المرء حينما يواجه هذا النسق (أي نسق البرنكيبيا) فيبدو نه انه مختلف و متميز بكل ما في الكلمة من معنى(١٨).

لقد كانت الغاية من هذا الكتاب هي تحليل الرياضيات تحليلاً يردها إلى أصولها المنطقية ثم تحليل المبادئ المنطقية نفسها تحليلاً ينتهي بنا إلى عدد قليل من الفروض التي منها نستطيع أن نستنبط كل قواعد المنطق و كل قواعد الرياضيات(١٩)، ويعبر رسل عن هذا بقوله " كان الهدف

المبدئي من الكتاب هو إثبات إن الرياضيات البحتة بأكملها تقوم على مقدمات منطقية خالصة وأنها تستخدم مدركات عقلية لا يمكن تعريفها إلا على أساس من المنطق(٢٠).

---

(١٥) برتراندرسل : فلسفتي كيف تطورت : ترجمة . عبد الرشيد الصادق . مراجعة و تقديم . د/ زكي نجيب محمود. مكتبة الانجلو المصرية، الطبعة الأولى، القاهرة ١٩٦٠، ص ٨٨

(16) P.H . Nidditch , the Development of Mathematical Logic , P.78

(17) Raymond L Wilder, Introduction to The Foundations of Mathematics, second edition, john Wiley & sons, INC. New York. London Sydney. 1965. P. 219

(18) Susan k Langer , op . cit , p288

(١٩) د/ زكي نجيب محمود . المنطق الوضعي . الجزء الثاني . الطبعة الخامسة، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة ١٩٨٠ ص ١١٦

(٢٠) برتراند رسل، فلسفتي كيف تطورت ، ص ٨٩

إن هذا الرأى لرسل يقوم على افتراض مزدوج[٢١].

أولا :- يمكن ترجمة الحقائق الرياضية إلى حقائق منطقية، بعبارة أخرى إن مجموعة المفردات اللغوية للرياضيات تمثل مجموعة فرعية من المفردات اللغوية الخاصة بالمنطق .

ثانياً :- كل البراهين الرياضية يمكن إعادة صياغتها كبراهين منطقية، بمعنى أن مبرهنات الرياضيات تتكون من مجموعة فرعية من مبرهنات المنطق.

لذلك فإنه في هذا الكتاب تزيل الفوارق بين الرياضيات والمنطق[٢٢].كما أن المنهج الذي استخدمه رسل ووايتهد في هذا الكتاب قد استحوذ على عقول القراء ، حيث ينظر الباحثون إلى البرنكيبيا على أنه من أعظم الكتب في المنطق بعد الأورجانون لأرسطو[٢٣].

فذلك الكتاب والذي يشتمل على إجابة رسل على السؤال "ما هي الرياضيات"؟ يقف موازياً لدور الدراسات الضخمة الأخرى التي تقف وراء الإجابة على أسئلة مثل ما هي الجاذبية" ؟ والتي أوضحت أن الجاذبية عامة ومستقلة عن اللون والشكل والتركيب الكيميائي للعناصر، فوجود مثل هذه الدراسات قد شكل جزءاً هاماً من نظرتنا للعالم الفيزيقي، وبالمثل فإن كتاب "برنكيبيا ماتيماتيكا" قد شكل وجهة نظر الرياضي الحديث[٢٤].فكان بمثابة الدافع وراء مزيد من البحث حول أسس الرياضيات على مدى القرن العشرين، كما كان له تأثيرٌ مهمٌ خارج نطاق الفلسفة والمنطق ، مثل تأثيره في علم اللغويات والحاسب الآلي، وعلى الرغم من هذا فقد وجهت العديد من الانتقادات لكتاب البرنكيبيا منها على سبيل المثال، أن رسل ووايتهد قد احتاجا في سبيل إتمام مشروعهما إلى العديد من الافتراضات التي لم يتم التأكد من طبيعتها المنطقية مثل بديهية اللاتناهى و التي تنص على أنه (يوجد عدد غير منتهى من الأشياء) فهذه البديهية قد قدمت افتراضاً نظر إليه الباحثون على إنه افتراض تجريبيٌ وليس منطقياً في طبيعته[٢٥].

(21) WWW . amazon. Com, books , Principia Mathematica , Reviews

(٢٢) د/ زكى نجيب محمود : المرجع السابق، ص ١١٦

(23) WWW . amazon . com, op. cit

(24) D.F. Pears , Bertrand Russell, A collection of Critical Essays, Doubleday & Company, INC. Garden city , new York 1972, P- 174

(25) WWW . amazon . com, op. cit

إلا أن رسل قد رد على مثل هذا النوع من الانتقادات بقوله " أن السبب الذي من أجله نسلم ببديهية من البديهيات – أو بأي قضية أخرى هو سبب استقرائي إلى حد كبير، وأن كثيراً من القضايا التي لا يكاد يتطرق إليها الشك يمكن أن يستنبط منها، وإننا لا نعرف طريقة غيرها في مثل معقوليتها يمكن أن تصدق بها هذه القضايا إذا كانت هذه البديهية كاذبة[٢٦].

وعلى الرغم من سهام النقد التي وجهت إلى نسق البرنكيبيا إلا أنه ظل شامخاً كأبرز علامات في تاريخ المنطق الرياضي حيث تكمن أهميته فيما يلي[٢٧] :-

١- عمل على زيادة انتشار المنطق الرياضي الحديث إلى درجة تخطت ما كان يحلم به المؤلفان.

٢- أظهر الكتاب بوضوح شديد القدرة الاستنباطية للمنطق حيث استطاع المؤلفان بيان مقدار القوة والرسوخ الذي يتمتع به النسق الصوري مما فتح الطريق أمام عمل جديد سمي فيما بعد بما وراء المنطق.

٣- أكد هذا الكتاب على وجود صلات وروابط واضحة بين النزعة المنطقية (اللوجستيقا) وبين فرعين من فروع الفلسفة و هما الميتافيزيقا ومبحث المعرفة (الابستومولوجيا).

---

(٢٦) برتراندرسل : فلسفي كيف تطورت،ص ١٤٦

(27) WWW . amazon . com, op, cit

ثالثاً: الرموز المستخدمة في كتاب برنكيبيا ماتيماتيكا
(الرموز الأساسية)

لقد استخدم أصحاب البرنكيبيا المصطلح الرمزي لبيانو نظراً لبساطته ، ومن المعروف أن المصطلح الرمزي يتكون من رموز للمتغيرات و رموز للثوابت. وأن المتغير هو تعبير رمزي في الرياضيات يرمز إلى كمية غير محددة استعاره المنطق ليدل على أى رمز غير محدد المعنى ، وحين نعطى لمتغير ما معنى محدد نسمى هذا المعنى قيمة المتغير **Value of Variable**، وقد يرمز المتغير إلى اسم علم أو صنف (فئة) أو قضية. وقد استخدم أصحاب البرنكيبيا حروف معينة من حروف الهجاء لتدل على المتغيرات[٢٨].

أما الثابت المنطقي فهو الحرف أو الكلمة أو عدد الكلمات التي تربط بين قضيتين أو أكثر، والثوابت الرئيسية في البرنكيبيا أربعة ثوابت[٢٩] وهي :

١- ثابت السلب و رمزه (~) فمثلا تدل **P** ~ على نفى القضية **P**[٣٠].

٢- ثابت الربط و رمزه (٠) و نعبر عنه في اللغة العربية بواو العطف ، وفي الإنجليزية بـ (**and**) فمثلا (**p٠ q**) نقرؤها **p and q**

٣- ثابت الفصل و رمزه (**V**)و نعبر عنه في اللغة العربية بالصيغة (أما .... أو ....) فمثلا (**p v q**) تعنى (**p or q**) .

٤- ثابت اللزوم ورمزه(⊃) فالقضية المركبة ($p \supset q$) معناها أن القضية **p** تستلزم القضية **q**، ويمكن تعريف التضمن بواسطة السلب والفصل كما يلي $p \supset q = \sim pvq$ f,[٣١].

وقد استطاع أصحاب البرنكيبيا بالإستعانة بتلك الدالات الأربعة إشتقاق دالات أخرى مثل دالة التكافؤ ورمزها (≡) فالقضية المركبة $p \equiv q$ تعنى إن القضية **p** تكافؤ القضية **q** .

---

(٢٨) د/ محمود فهمي زيدان .المنطق الرمزي- نشأتة و تطوره . ص ص ١٨٣ ، ١٨٤

(٢٩) نفس المرجع ص ١٨٤

(30) Raymond L .Wilder , introduction to the fundition of mathematics, P 223

(31) Alfred North Whitehead & Bertrand Russell, Principia mathematica Vo 1. cambridge university press, Cambridge 1962, P 94

وقد وضع أصحاب البرنكيبيا تعريفاً لها بواسطة دالتي اللزوم والربط وذلك بالإتيان بدالتي تضمن إختلف موضع المقدم والتالي في أحداهما عنه في الأخرى ثم ارتباط الدالتين بثابت الربط.

والصيغة الرمزية لتعريف دالة التكافؤ هي $p \supset q \cdot q \supset p : = \cdot q \equiv p$ [٣٢]

ويشير أصحاب البرنكيبيا إلى تقرير قضية ما بالرمز (⊢)[٣٣] فمثلاً الصيغة P⊢ معناها الجزم بصدق القضية P فبدون هذا الرمز لا يتم وضع أي افتراض يتعلق بتقرير القضية P ، كما إن كل البديهيات هي أمور مجزوم بصحتها لذلك يسبقها الرمز (⊢)[٣٤].

وبالنسبة للأقواس التي بداخل أقواس أخرى فيستخدم نقاط مزدوجة وصورتها (:) لتدل على الأقواس الخارجية[٣٥].

(٣٢) د/ محمود فهمي زيدان : المرجع السابق . ص١٨٨

(33) principia, vo 1, P 92
(34) Raymond L . Wilder , op . cit., p 222
(35) Ibid, P 223

رابعاً: ترقيم المبرهنات في نسق البرنكيبيا

تعد المبرهنات غاية كل نسق فهي النتائج المباشرة للتسليم بالأفكار والقضايا والقواعد السابقة عليها وبها يكتمل عمل المنطقي أو عالم الرياضيات وتصدق خطته في بناء النسق(٣٦).

وفي كتاب البرنكيبيا يكون من الضروري فهم عملية ترقيم المبرهنات حتى يسهل متابعة وفهم هذا النسق .

ففي البرنكيبيا يسبق رقم أى مبرهنة علامة النجمة (*) وهذه طريقة سهلة ومريحة للتميز بين الأرقام التي تشير إلى المبرهنات وتلك التي لا تشير إليها. وكل المبرهنات المرتبطة في مجموعة واحدة لها نفس الرقم ذو النجمة والذي يسهل عملية التقسيمات الفرعية للمبرهنات فمثلاً الرقم 1* يشير إلى مجموعة المسلمات والأفكار الأولية (٣٧)، والرقم 2* يشير إلى مجموعة النتائج المباشرة للقضايا والأفكار الأولية(٣٨)، وهذه المجموعة من المبرهنات تحتوى على ثوابت السلب والفصل والتضمن(٣٩)' والرقم 3* يشير إلى مجموعة المبرهنات الناتجة عن الضرب المنطقي بين قضيتين(٤٠)، والرقم 4* يشير إلى مجموعة المبرهنات التي تعتمد على ثابت التكافؤ(٤١).

ويتكون رقم كل مبرهنة، من رقم المجموعة التي تنتمي إليها الإضافة إلى رقم عشري يشير إلى رقم المبرهنة، وهذا أيضاً يقدم طريقة سهلة وميسرة للحفاظ على تسلسل الأرقام في حالة حذف بعض المبرهنات . أو إضافة مبرهنات جديدة ، فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا مبرهنات بالأرقام 2.1 ، 2.2 ، 2.3 ، 2.4 ، 2.5 وأردنا حذف المبرهنة رقم 2.3 أمكننا ذلك وبقى لدينا 2.1 ، 2.2 قبل 2.4 ، 2.5 في ذلك الترتيب ولن نضطر إلى تغيير أرقام المبرهنات للحفاظ على الترتيب.

---

(٣٦) د/ محمد محمد قاسم . نظريات المنطق الرمزي، ص ١٦٤

(37) Hardold Newton Lee, op . cit , P 304

(38) Principia, vo 1, P 98

(39) Harold Newton lee , op. cit , P 304

(40) Principa, vo 1, P 109

(41) Ibid , P 115

والأهم من ذلك هو إمكانية إدخال مبرهنة جديدة في أي مكان دون حدوث غموض أو التباس وتغيير لأرقام المبرهنات التي تأتي بعد المبرهنة الجديدة، فمثلاً لو أردنا أن ندخل مبرهنة جديدة بين 2.1 ، 2.2 فإننا نقوم بترقيمها بالرقم 2.11 وهذا يقع في ترتيب متسلسل بين 2.1 ، 2.2 ولو أردنا إدخال مبرهنتين في نفس المكان يمكن أن نرقم الأولى بالرقم 2.11 والثانية بالرقم 2.12 ومن ثم يكون لدينا 2.1 ، 2.11 ، 2.12 ، 2.2 . وأيضاً يمكن أن ندخل مبرهنة أخرى بين 2.11 ، 2.12 وذلك بترقيمها بالرقم 2.111 . وأيضاً يمكننا إدخال مبرهنة جديدة بين 2.1 ، 2.11 وترقيمها بالرقم 2.101 . ويمكننا أيضاً إدخال مبرهنة أخرى بين 2.111 ، 2.12 وترقيمها بالرقم 2.112 وهكذا . وبعد هذا نصل إلى الترتيب الآتي :-

2.1
2.101
2.11
2.111
2.112
2.12
2.2
2.4
2.5

حيث نلاحظ عدم تغير أي رقم من الأرقام الأصلية للمبرهنات وتظل القائمة في ترتيب متسلسل[٤٢].

(42) Harold Newton Lee, symbolic logic, P 305

خامساً : الموضوعات المنطقية في كتاب برنكيبياماتيماتيكا

بما أن رسل هو الذي كتب الجانب المنطقي من كتاب " برنكيبياماتيماتيكا " لذلك سوف نتحدث فيما يلي عن أهم الموضوعات المنطقية فيه.

أ- موقف رسل من مبحث القضايا

لقد ميز رسل بين خمسة أنواع من القضايا وهي[٤٣]

- القضية الذرية **Atomic Proposition** .
- القضية المركبة (الجزيئية) **Molecular Proposition** .
- القضية العامة **General Proposition** .
- القضية العامة عمومية تامة **Completely General Proposition**.
- القضية الوجودية **Existential Proposition**

وفي كتاب البرنكيبيا قام رسل بالتمييز بين نوعين من القضايا الخمس السابقة[٤٤]. وهى القضايا الذرية والقضايا المركبة وذلك في مقدمة الطبعة الثانية من الكتاب.

١- القضايا الذرية :-

يقول رسل " يبدأ نسقنا من القضايا الذرية، ونحن نقبلها كمعطى لأن المشكلات التي تنشأ عنها تخص الجانب الفلسفي من المنطق، ولا تسمح (على الأقل في الوقت الحاضر) بتناول رياضي[٤٥]"، ويمكن تعريف القضايا الذرية تعريفا سلبيا على أنها قضايا لا تحتوى على قضايا أخرى كجزء

(٤٣) د. محمود فهمى زيدان، المنطق الرمزى نشأته وتطوره ، ص ١٧٨

(44) Harlod Newton Lee , op . cit , p 299

(45) Principia, vo 1, second edition , p xv

وأيضا . د . محمود فهمي زيدان . المرجع السابق ص ١٧٩

من مكوناتها ، كما أنها لا تحتوى على مفاهيم مثل كلمة "كل أو بعض"[٤٦]، ويمكن تعريفها إيجابياً[٤٧]، على أنها قضايا تقرر شيئاً معيناً له كيفية معينة أو أن أشياء معينة لها علاقة معينة[٤٨]، وقد قصد رسل من تسميته القضايا الذرية بهذا الاسم ليدل على أنها أكثر أنواع القضايا بساطة، ومن أمثلتها : القضية "هذا أحمر" والقضية "هذا قبل ذاك" فالقضية الذرية هي قضية لا يمكن تحليلها إلى قضايا أخرى . فهي تتألف من أسماء وصفات بمفردها دون ثوابت منطقية[٤٩]. لكن يمكن أن تنحل إلى الألفاظ التي تتكون منها فقط ، ومن هنا نجد أن القضايا الذرية تناظر الوقائع الذرية ، فالوقائع الذرية لا تنحل إلى الأشياء التي تدخل في تركيبها. فتحليل الواقعة الذرية إلى أجزاء تحليل منطقي لا مادي ، إذ الواقعة الذرية في الحقيقة وحدة لا تتجزأ . فلا يمكن مثلاً أن أفصل بين سقراط من ناحية وأثيني من ناحية أخرى ، تماماً كما يحدث في علم الطبيعة. حيث أن الذرة في علم الطبيعة يمكن تحليلها منطقياً إلى إلكترونات وبروتونات ، مع استحالة فصل هذه الأجزاء في الطبيعة الواقعة. ومثل هذا يقال على القضايا الذرية التي تناظر هذه الوقائع الذرية. فهي لا تنحل إلى قضايا أبسط منها . بل إلى الألفاظ المركبة منها وحسب[٥٠].

وتشتمل القضايا الذرية على ثلاثة أنواع من الألفاظ ، المحمولات التي تعبر عن علاقة واحدية ، والأفعال وهي ألفاظ تعبر عن علاقة من نوع أعلى ، والألفاظ التي لا تكون محمولات أو أفعالاً وتسمي موضوعات القضية وبذلك يكون هناك موضوع واحد في القضية الواحدية وموضوعان في الثنائية، وهكذا[٥١]. وتوجد مسألة أخرى خاصة بطبيعة القضايا الذرية في تصور رسل وهي

---

(46) Principia, vo 1, p xv

(47) Ibid , P XV

(٤٨) د/ محمد مهران . فلسفة براتراندرسل ، دار المعارف، القاهرة ١٩٧٩، ص ٢٤٩

(49) Frank Plumpton Ramsey , The foundation of Mathematics , and other logical essays, Kegen Paul , trench , Trubner & co , LTD, London, 1931 , p 5

(٥٠) د. محمد مهران . فلسفة برتراند رسل، ص ٢٥١

(٥١) نفس المرجع ، ص ٢٥٠

القول باستقلال كل قضية ذرية عن كل قضية ذرية أخرى. ولا يمكن أن يتم ارتباط بين هذه القضايا إلا عن طريق الروابط المنطقية[٥٢].

٢- القضايا المركبة (الجزيئية):-

هي تلك القضايا التي تشتمل على ألفاظ مثل أو، إذا، و[٥٣]، ومن ثم فالقضية المركبة هي قضية تتكون من قضيتين ذريتين أو أكثر ارتبطت بأحد الثوابت المنطقية[٥٤] .ويطلق رسل على القضايا من مثل هذا النوع اسم " القضايا الجزيئية " إذ أن القضايا الداخلة فيها تدخل بنفس الطريقة التي بها تدخل الذرة في تركيب الجزئيات[٥٥]، ومن أمثلة هذه القضايا: القضية المركبة "إذا استيقظت مبكراً سأذهب إلى العمل ماشياً" فهي تتركب من جزئين" استيقظت مبكراً" و "سأذهب إلى العمل ماشياً". ويمكن للقضايا المركبة أن تكون صادقة أو كاذبة كالقضايا الذرية لكن بطريقة مختلفة، فإذا كانت القضية الذرية توجد واقعة واحدة لها هي التي تجعلها صادقة أو كاذبة. فالأمر مختلف بالنسبة للقضايا المركبة . فإذا كان لدينا قضية مثل " ق أو ك " أي " إما أن سقراط ميت أو سقراط ما زال حياً " فسيكون لدينا واقعتان مختلفتان يتوقف عليهما صدق قضيتنا المركبة أو كذبها ، فستكون هناك الواقعة المناظرة لـ "ق" وتلك التي تناظر " ك " وكلتا

(٥٢) نفس المرجع، ص ص ٢٥٠ ، ٢٥١

(٥٣) نفس المرجع ، ص ٢٥٦

(٥٤) د.محمود فهمي زيدان : المرجع السابق ، ص ١٨٩

(٥٥) د. محمد مهران : فلسفة برتراندرسل ، ص ٢٥٧

القضيتين ملائمتان للكشف عن صدق " ق أو ك " أو كذبها [٥٦]. ويطلـق رسـل علـى هـذه القضايـا المركبة أو بمعني أدق دوال القضايا مصطلـح "دوال الصـدق" [٥٧]، ومـن ثـم فدالـة الصـدق إذن هـي الصورة الرمزية لإحدى القضايا المركبــة. أمـا قيمـة الصـدق **Truth Value** لقضيـة فتعـني الحكم عليها بالصدق أو بالكذب [٥٨].

---

(٥٦) نفس المرجع، ص٢٥٧

(٥٧) نفس المرجع، ص ص ٢٥٧، ٢٥٨

(٥٨) د. محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي ، ص ٤٥

ب – نظرية حساب القضايا Proposition Calculus

لقد ميز أصحاب البرنكيبيا بين نظريات المنطق الرمزي الأربعة وهي حساب القضايا وحساب المحمول وحساب الفئات وحساب العلاقات وقد تناول رسل كل نظرية منها على حدة، كما وضع كل نظرية منها في نسق استنباطي وذلك بالكشف الصريح عن قائمة لامعرفاتها وتعريفاتها ومصادراتها ثم البرهان على قضايا مشتقة واستنباط القضايا التحليلية على نحو لم نعهده من قبل[٥٩]. وتعد نظرية حساب القضايا هي أول خطوة من خطوات تطبيق النسق الاستنباطي في المنطق على نحو تام. فيسميها أصحاب البرنكيبيا أحياناً بـ (نظرية الاستنباط)[٦٠]، لأنها تتعلق بالطريقة التي تتكون بها قضية مستنبطة من قضية أخرى[٦١].

وتبدأ نظرية حساب القضايا بوضع عدد معين من الأفكار الأولية وعدد معين آخر من التعريفات . وعدد معين ثالث من القضايا الأولية نستنبط منها قضايا أخرى نسميها " نظريات " مع الاستعانة بما يسمي قواعد الاشتقاق أو قواعد الاستدلال [٦٢] .

أولاً – الأفكار الأولية Primitive ideas

هي مجموعة من المفاهيم الدالة على أفكار معينة وعلاقات معينة تكون مستخدمة في النسق[٦٣]، وبالنسبة لنظرية حساب القضايا فقد ذكر أصحاب البرنكيبيا ثلاثة أفكار أولية وهي

أ – القضايا الابتدائية Elementary proposition

وتسمي أحياناً بالقضايا التمهيدية [٦٤] وهي تلك القضايا التي لا تتضمن كلمات مثل " كل " ، " بعض "، " أل " للتعريف أو مرادفات لهذه الكلمات . ففي القضية " هذا أحمر " مثلاً نجد أن كلمة (هذا) تشير إلى شيء ندركه بواسطة الإحساس . لذلك فإن هذه القضية تكون ابتدائية . وأي

---

(٥٩) د . محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي – نشأته و تطوره ،ص٢٦٨

(60) Principia, vo 1, p 90

(٦١) د . محمد مهران: مقدمة في المنطق الرمزي ، ص ١٥٥

(٦٢) د. محمود فهمي زيدان :المرجع السابق، ص ٢٠٥

(٦٣) د. محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزى، ص، ١٥٦

(٦٤) نفس المرجع ، ص١٥٧

تركيب لهذه القضايا الابتدائية عن طريق السلب أو الفصل أو الربط ستكون هي الأخرى قضايا ابتدائية . وسوف يتم استخدام حروف مثل p , q , r , s للإشارة إلى القضايا الابتدائية [٦٥] .

ب- التقرير : Assertion

وهو الجزم بقضية ما أو اعتبار أنها صادقة . فمثلاً لو أنني قلت أن " قيصر مات " فإنني أقرر صحة القضية التي تقول أن " قيصر مات " [٦٦] .

جـ – فكرة الثابت المنطقي[٦٧] :

قد تحدث أصحاب البرنكيبيا عن ثابتين منطقيين باعتبارهما من الأفكار الأولية، وهما ثابت السلب (~) والفصل (V)[٦٨]، حيث لا يمكن ردهما إلى أفكار أبسط منهما أو تعريفهما بثوابت أخرى[٦٩]، بل يمكن استخدامهما في تعريف غيرهما من الثوابت المنطقية الأخرى مثل ثابت الربط وثابت التضمن وثابت التكافؤ.

ثانياً – التعريفات Definitions

بعد الأفكار الأولية تأتي التعريفات، ويقصد بها تحديد معني ثوابت أو حدود معينة بالاستناد إلى ما سلمنا به من أفكار أولية [٧٠] ، بمعني آخر هي التصريح بأن مجموعة من الرموز (حديثة الإستخدام) والموجودة في سياق معين تساوي في معناها مجموعة من الرموز الأخرى والموجودة في سياق معين آخر والمعروف معناها بالفعل بحيث يكون لدينا معني ناتج عن التعويض بمجموعة الرموز المعروف معناها[٧١].

---

(65) Principia, vo 1, p p 91, 92

(66) Ibid , P 92

(٦٧) د . محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزى . ص ١٥٧

(68) Principia, vo 1, p 93

(٦٩) د . محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي . ص ١٥٥

(٧٠) نفس المرجع ، ص ١٥٥

(71) Principia, vo 1, p 11

فمثلاً أمكن تعريف ثابتي الربط واللزوم كل على حدة بواسطة ثابت السلب والفصل كما يلي:-

أ ـ تعريف ثابت الربط بواسطة السلب و الفصل وهو

$$P \,.\, q \,.= : \sim (\sim p v \sim q)$$ (٧٢)

ومعناها أن قولنا بأن القضية " P " والقضية " q " صادقتان مساوٍ لقولنا أنه من الكذب أن يقال إما " P " كاذبة أو " q " كاذبة .

ب- تعريف ثابت اللزوم بواسطة السلب والفصل وهو

$$p \supset q \,.= : \sim p \vee q$$ (٧٣)

ومعناها أن قولنا بأن القضية " p " يلزم عنها القضية "q" مساوٍ لقولنا أنه إما أن تكون " p " كاذبة أو " q " صادقة .

جـ- وأيضاً أمكن لأصحاب البرنكيبيا تعريف ثابت التكافؤ بواسطة ثابتي الربط واللزوم (والذي سبق أن تم تعريفها بواسطة ثابتي السلب والفصل) كما يلي :

$$p \equiv q \;= p \supset q \,.\, q \supset p$$ (٧٤)

ومعناه أن قولنا بأن القضيتين " p " والقضية " q " متكافئتان مساوٍ لقولنا أن القضية " p " يلزم عنها القضية " q " والقضية " q " يلزم عنها القضية "p".

وقد اقترح شيفر Sheffer على رسل عندما التقيا في جامعة هارفارد عام ١٩١٤ بإمكان تعريف السلب والفصل وبالتالي سائر الثوابت المنطقية الأخرى بواسطة فكرة واحدة أولية وهي فكرة عدم الاتساق ورمزها (/) ،وتتخذ دالة الصدق التي تحويها الصورة (p / q) ونقرأها "p غير متسقة مع q" . وقاعدة هذه الدالة هي ألا تصدق القضيتان معاً وأنه يجب أن تكون إحداهما على الأقل كاذبة أي تصدق هذه الدالة إذا كذبت إحدى القضيتين أو كلتاهما ، وتكذب

---

(72) Principia, vo 1, P 11

(73) Ibid, vo 1, P 11

(74) Ibid, vo 1, P 11

إذا صدقتا معاً [٧٥]،وقد أشار رسل إلى هذا الرأي في مقدمة الطابعة الثانية من البرنكيبيا . حيث عرف الثوابت المنطقية في ضوء هذه الفكرة كما يلي [٧٦].

$1- \sim p = p / p$ DF,

ومعناه أن القضية عندما تكون كاذبة فهذا مساو لقولنا أن القضية " p " غير متسقة مع ذاتها . ومن ثم فإن الصورة (p/p) هي الصورة الجديدة لدالة السلب أو التناقض .

$2- p \supset q = p / \sim q$ DF,

ومعناه أن قولنا أن القضية " p " يلزم عنها القضية " q " مساو لقولنا أن "p" لا تتسق مع كذب " q "

$3- p \vee q = \sim p / \sim q$ DF,

ومعناه أن قولنا إما أن تكون " p " صادقة أو " q " صادقة مساو لقولنا بعدم اتساق كذب القضيتين " p " ، " q " (أي إذا كذبت أحداهما يجب أن تصدق الأخرى) بفرض أن الدالة صادقة .

$4- p . q = \sim (p/q)$ DF,

ومعناه أن قولنا بأن القضيتين " p " و " q " صادقتان مساو لقولنا أنه من الكذب القول بأن " p " غير متسقة مع " q " وذلك بفرض صدق الدالة. وبالتعويض عن ثابت السلب بصورته الجديدة والذي يعني عدم اتساق القضية مع ذاتها فإن الصورة الجديدة لدالة التضمن تصبح(q/q)/ p ودالة الفصل تأخذ الصورة(q / q) / (p / p) أما دالة الربط فتأخذ الصورة (p/q) . (p/q)

ثالثاً- القضايا الأولية Primitive propositions (المصادرات)

هي مجموعة من الصيغ نفترضها دون برهان . ويتم على أساسها البرهنة على غيرها من الصيغ[٧٧]، وفي هذا الصدد يقول رسل في مقدمة الطبعة الأولي من البرنكيبيا " يجب افتراض

(٧٥) د . محمود فهمي زيدان . المرجع السابق . ص ٢٠٦ .

(76) Principia, vo 1, introduction to second edition, P xvi

(٧٧) د . محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزى، ص ١٦٢

بعض القضايا دون برهان، لأن كل استدلال يبدأ من قضايا قد سبق لنا تقريرها "، وهـذه القضايـا تسمي بالقضايا الأولية وهي كالأفكار الأولية ، تعبر عن أمر اختياري(٧٨) .

والمقصود بكلمة اختياري هنـا أن لصاحب النسق المنطقي – شأنه في ذلك شأن صاحب النسق الرياضي – الحرية في اختيار مصادراته(٧٩) ،على أن تستوفي مجموعة شروط وهي أن تكـون قليلـة العدد ما أمكن وأن تكون خالية من التناقض فيما بينها – كما ينبغـي ألا تتنـاقض مـع مـا يشـتق منها من نظريات وأن تكون كل منها مستقلة عن الأخرى، بمعني ألا تشتق أحداها من الأخرى ، وأن تكون كافية لإمكان اشتقاق قضايا صادقة منها(٨٠) ."وبالنسبة لعـدد القضايـا الأوليـة في كتـاب برنكيبياماتيماتيكا لم يكن ثابتاً إذ نجدها سبعة في مقدمة الطبعة الأولى(٨١)، وإحدى عشر قضيـة في داخل الكتاب في الجزء الأول . بينما نجدها خمسـة في كتـاب "مقدمـة للفلسـفة الرياضيـة"(٨٢) لرسل.

وهذه المصادرات الخمس هي :–

١- مبدأ تحصيل الحاصل . Principle of tautology

وصورته الرمزية هي $p \vee p . \supset p$ ومعناه أنه إذا كانت " p " صادقة أو " p " صادقة فأن "p" صادقة.

٢- مبدأ الإضافة (الجمع) Principle of addition

وصورته الرمزية هي $q \supset . p \vee q$ ويقرر هذا المبدأ بأنه إذا كانت "q" صادقة فإن القضيـة المركبة التي تقول ("p" صادقة أو "q" صادقة) تكون صادقة . بمعني آخر أن دالة الفصـل تكـون صادقة إذا صدقت إحدى القضايا المؤلفة لها .

---

(78) Principia, vo 1, p 12

(٧٩) د . محمد مهران : المرجع السابق،ص ١٦٢

(٨٠) د . محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي، ص ص ١٥٦، ١٥٧

(81) Principia, vo 1, p 13

(٨٢) برتراندرسل : مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٦٣

٣ـ مبدأ تبادل المواضع principle of permutation

وصورته الرمزية هي p V q . ⊃ . q V p ويقرر هذا المبدأ أنه إذا صدقت القضية المركبة (p أو q) صدقت القضية المركبة (q أو p) .

٤ـ مبدأ الربط Associative principle

وصورته الرمزية هي pV.qVr : ⊃ qV.pVr

وينص على أنه إذا صدقت القضية " p " أو القضية القائلة (q أو r) فإن ذلك يقتضي صدق أن " q " صادقة أو (p أو r) صادقة.

٥ـ مبدأ الإجمال Principle of summation [٨٣].

وصورته الرمزية q⊃r. ⊃ : pVq ⊃ . pVr ، ومعناه أنه يمكن أن يضاف بديلاً في دالة لزومية — إلى كل من المقدمة والنتيجة دون أن ينال ذلك من صدق اللزوم.

إن هذه القضايا الأولية[٨٤] أو البديهيات في شكلها الرمزي يمكن أن نطلق عليها إسم "مجموعة الصيغ الأساسية" [٨٥] .

رابعاً : قواعد الاستدلال (الاشتقاق Drivation)

وهي تلك المعايير التي تحكم عملية الاستدلال حين نستنبط من مجموعة مقدمات — أفكار أولية وتعريفات وبديهيات (مصادرات) — مبرهنات لازمة عنها. وتتوقف صلابة النسق وقوته ودقته على مدي التزامنا بتطبيق قواعد الإستدلال . وقد قال "رسل"و " واتيهد" بقاعدتين أساسيتين هما قاعدة التعويض وقاعدة إثبات التالي[٨٦].

ومن الأفكار الأولية والتعريفات والقضايا الأولية في حساب القضايا . يقيم أصحاب البرنكيبيا نظريات منطقية مستنبطة من تلك البدايات، مع الاستعانة بقواعد الاستدلال [٨٧] .

---

(٨٣) د . محمد مهران : مقدمه فى المنطق الرمزى، ص ١٦٧

(84) Principia, vo 1, p p 96 , 97

(85) Raymond L .Wilder , introduction to the foundations of mathematics, p 225

(٨٦) د- محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي . ص ١٦٠

(٨٧) د- محمود فهمي زيدان : المنطق الرمزى — نشأته وتطوره، ص ٢٠٩

جـ- نظرية حساب دوال القضايا

Calculus Of Propositional Functions

بعد عرض نظرية حساب القضايا يمكننا أن نتوسع فيها بحيث نجعلها تمتد إلى نظرية أخرى أكثر عمقا يطلق عليها اسم" نظرية حساب دوال القضايا أو حساب المحمول predicate calculus"[88] وذلك عن طربق تحليل القضية لمعرفة الأجزاء التي تنطوي عليها وهى الموضوع و المحمول وسور القضية فإذا كانت نظرية حساب القضايا تتناول القضية ككل دون تمييز بين حدودها كما أنها لا تتناول فكرة السور في القضية. أى ما يدل على كم موضوعها . نجد أن نظرية حساب المحمول تسد هذين النقصين إذ تضع تحليلاً جديداً لعناصر القضية ومن ثم تلقى الضوء على أنواع أخرى من القضية غير القضية الحملية . كما تضع تحليلاً جديداً لسور القضية[89].

لكن على الرغم من وجوه التمايز بين النظريتين،تظل نظرية حساب القضايا أساساً منطقياً لنظرية حساب المحمول من حيث إستخدام نفس الثوابت المنطقية ودالات الصدق وقيم الصدق وجزءاً من المصطلح الرمزي بل إن كثيراً من الصيغ التحليلية في حساب القضايا هي ذاتها صيغ تحليلية في حساب دالات القضايا وإن عبرنا عنها بمتغيرات جديدة[90].

ومن الناحية التاريخية فإنه يرجع الفضل إلى "فريجه" في وضع أصول هذه النظرية وإن كان بيرس قد عرف بعض أفكارها إلا أنها كانت مرتبطة عنده بمنطق جبر الأصناف.

وقد تحدث رسل عن هذه النظرية في كتابه " أصول الرياضيات " Principles Of Mathematics إلا أنه قام بتطويرها تطويراً دقيقاً في كتاب " برنكيبياماتيماتيكا " Principia Mathematica الذي ألفه بالاشتراك مع وايتهد تحت عنوان " نظرية المتغيرات الظاهرية " Theory Of Apparent Variables[91].

وقد استطاع رسل أن يضع هذه النظرية في نسق إستنباطي يتكون من أفكار أولية وتعريفات ومصادرات .

---

(88) Raymond L .Wilder , Op. Cit., p 235

(٨٩) د/ محمود فهمي زيدان : المرجع السابق، ص ص ٢١٩، ٢٢٠

(٩٠) د/ محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي، ص ٢١٠

(91) Principia, vo 1, p 127

أولاً : الأفكار الأولية :-

وهي ثلاثة أفكار أساسية وهي :

١- دالة القضية :

من الأمور المعلومة لنا أن القضية الحملية التي هي أبسط أنواع القضايا في المنطق التقليدي تتألف من موضوع ومحمول ورابطة تربط بينهما (قد لا يتم التصريح بها في لغتنا العربية) . فلو قلت أن " سعيد إنسان " لكانت لدينا قضية تمثل هذا النوع من القضايا التي أطلق عليها المنطق التقليدي إسم "القضية الشخصية أو القضية المفردة" وهي تقرر أن فرداً جزئياً معيناً وهو هنا " سعيد " يحوز صفة معينة وهي " كونه إنساناً " ويطلق على "سعيد" هنا اسم "الموضوع" وعلى "إنسان لفظ المحمول"[٩٢].

وتستخدم نظرية حساب المحمول رموزاً معينة للإشارة إلى الأشياء الفردية أو الجزئية وإلى أسماء الأعلام وتسمي هذه الرموز بالمتغيرات الفردية وهذه الرموز هي الحروف الأبجدية x ، y ، z .

وأيضاً تستخدم رموزاً تشير إلى الصفات أو المحمولات التي تسند إلى الموضوعات وتسمي هنا بالمتغيرات الحملية.وهي الحروف F ، G ، H ، J

وعلى ذلك فإنه يمكن التعبير عن القضية السابقة وهي " سعيد إنسان " في الصورة الرمزية (f x). حيث أن " f " تشير إلى المحمول ، (x) تشير إلى الموضوع (حيث أنه في المصطلح الرمزي لنظرية حساب المحمول نضع رمز المحمول قبل رمز الموضوع) أي أن " x " موصوف بالصفة " f " ومن هنا فإن الصيغة الرمزية (f x) تعبر عن دالة قضية، فدالة القضية كما يعرفها رسل هي تعبير يحتوي عنصراً أو أكثر غير محدد (متغير)، ويتم تحديد هذه العناصر (المتغيرات) عندما يتم تعيين قيمة لها بحيث يصبح التعبير الناتج قضية[٩٣].

---

(٩٢) د . محمد مهران : مقدمة في المنطق الرمزي، ص ١٩٧

(93) Principia, vo 1, p 92

٢- تقرير دالة القضية :

فإذا كانت لدينا [Φ] دالة قضوية حجتها (x). عندئذ يمكن تقرير x Φ [٩٤].

٣- فكرة التسوير Quantification :

تتميز الدالة في حساب دالات القضايا بوجود السور . وللسور أهمية خاصة في هذه النظرية حيث أنه إحدى وسائل الحصول على القضايا[٩٥] والسور في نظرية حساب دالات القضايا نوعان :

أ- السور الكلي :

ويدل على تقرير جميع قيم المتغير ورمزه في هذه النظرية هو (x) . ويحل محل العبارات مثل " بالنسبة لجميع القيم .... " ، " بالنسبة لأي ..... " ، " بالنسبة لكل ..... " [٩٦].

ومن ثم فإن السور الكلي هنا يشير إلى فكرة أساسية أولية وهي " صادق دائماً " أو "في كل الحالات" .

ب- السور الجزئي " الوجودي " :

ويدل على تقرير بعض قيم المتغير الوارد في دالة القضية . وقد استخدم أصحاب البرنكيبيا الرمز (x ∃) للإشارة إليه . والسور الجزئي في نظرية دالات القضايا يشير إلى فكرة أولية وهي " صادق أحياناً " أو " صادق في بعض الحالات "[٩٧].

ثانياً - التعريفات :-

لقد استخدم أصحاب البرنكيبيا في نظرية دالات القضايا فكرة السور بنوعيه (الكلي ، الجزئي) كفكرة أولية نبدأ بها بلا تعريف لكنها تستخدم في تعريف الأفكار الأخرى المأخوذة من نظرية

(94) Ibid,P 92

(٩٥) د . محمد محمد قاسم : المرجع السابق ص ٢١٤

(٩٦) د . محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزى، ص ٢٠٠ .

(٩٧) د. محمد محمد قاسم: المرجع السابق ، ص ٢١٤

حساب القضايا وهي أفكار السلب والفصل والربط واللزوم والتكافؤ ومن بين هذه التعريفات(٩٨) .

$1- \sim (x)\ (fx) = (\ \exists x\ )\ (\sim fx) \qquad DF,$

ومعناه أنه من الكذب أن نقول عن كل قيم (x) أن (x) توصف بالصفة "f" وهذا مساوي في معناه للقول أنه يوجد شيء واحد على الأقل من (x) لا يتصف بالصفة " f " .

$2- \sim (\ \exists x\ )\ (fx) = (x)\ (\sim fx) \qquad DF,$

ومعناه أن من الكذب أن نقول أنه يوجد شيء واحد على الأقل من (x) يتصف بالصفة " f " وهذا القول مساوي تماماً للقول أن كل قيم " x " لا تتصف بالصفة " f " .

وبالنسبة لمصادرات و قواعد الإستدلال الخاصة بنظرية حساب دالات القضايا فهي نفسها مصادرات وقواعد الاستدلال المستخدمة في نظرية حساب القضايا، إلا أنها صيغت في مصطلح جديد وهو المصطلح الرمزي الخاص بنظرية حساب دالات القضايا (٩٩).

(98) Principia, vo 1, p 16

(٩٩) د. محمود فهمى زيدان، المرجع السابق، ص ٢٢٤

د- نظرية الأوصاف **Theory of descriptions**

تعتبر نظرية الأوصاف عند رسل من أهم إسهاماته في الفلسفة،لم يكن هذا رأى رسل وحده، فقد أجمع العديد من الفلاسفة وعلماء المنطق بأن نظرية الأوصاف لرسل شيئٌ جديدٌ تماماً، فهي من أعظم اكتشافات التي قام بها رسل لأنها كانت بأكملها من صنعه وابتكاره ولم يتأثر فيها بأي شخص أخر(١٠٠).

كما اعتبرها البعض بأنها هي النموذج الذي يحتذى به في مجال الفلسفة، فعن طريق هذه النظرية استطاع رسل أن يتخلص من لغز فلسفي وهو وجود الأشياء الخيالية، وذلك بالمزيد من الانتباه والفهم الأفضل لمعاني الكلمات والجمل(١٠١).

إن أول صياغة تناول فيها رسل نظريته في الأوصاف كانت في بحثه المسمى " **on denoting**" في الدلالة عام ١٩٠٥(١٠٢).

وكانت أول صياغة لهذه النظرية معقدة وأيضاً النتائج المشتقة منها(١٠٣)، إلا أن رسل ظل ينقح فيها مدة خمس سنوات، ثم أصبحت بعد ذلك جزءاً هاماً من "برنكيبيا"(١٠٤)، حيث يقول رسل في هذا الصدد" لقد بسطت نظرية العبارات الوصفية لأول مرة في مقالتي التي نشرتها بمجلة **Mind** "ما يند" بعنوان" في دلالة الألفاظ على مسمياتها "وقد بدا لرئيس التحرير آنذاك أن هذه النظرية من البطلان بحيث رجاني أن أعيد النظر فيها وألا اطلب نشرها وهي على صورتها تلك، ولكنني مع ذلك ظللت مقتنعاً بصحتها ورفضت أن أستسلم لرأى رئيس التحرير، على أن هذه النظرية قد لقيت بعد ذلك القبول على وجه عام ، وأصبحت تعتبر من أهم ما أسهمت به في المنطق(١٠٥).

(100) Alan Wood, Bertrand Russell, The passionate, Skeptic pub, Simon and Schuster, New York, 1958, P 63.

(101) Margaret Macdonald, philosophy and analysis , Basil Black Well, oxford , London, 1954, P7

(102) Morris Weitz, Analysis and the unity of Russell's Philosophy, in the philosophy of Bertrand Russell, by Paul Arthur Schilpp, North western university, Evanston and Chicago ,1944, P 95

(103) Alen Wood , op. cit ,p 63

(١٠٤) د. محمود فهمي زيدان : المنطق الرمزي – نشأته وتطوره ،ص ٢٣٢

(١٠٥) برتراند رسل : فلسفتي كيف تطورت ، ترجمة عبد الرشيد الصادق ، مراجعة وتقديم د/ ذكي نجيب محمود ، مكتبة الانجلو المصرية، الطبعة الأولى، القاهرة ١٩٦٠، ص٩٩

وكان لرسل قبل أن يقدم هذه النظرية موقفاً فلسفياً من المشكلات التي تعالجها نظريته، فقد كان في "أصول الرياضيات" واقعياً بالمعنى الافلاطوني ، متأثراً بواقعية مينونج " Meinong " ذاهباً إلى القول أن كل ما يمكن أن يكون موضوعاً للفكر ، وكل ما يرد في قضية صادقة أو كاذبة وكل ما يعد واحداً فهو "حد" وجميع الحدود موجودة أو كائنة بمعنى ما من المعاني(١٠٦).

فقد أشار مينونج انه في استطاعة المرء أن يقول عبارات موضوعها المنطقي هو " جبل من ذهب " على الرغم من انه لا يوجد جبل من ذهب، وكانت حجته في ذلك أنك إذا قلت : "إن الجبل الذي من ذهب غير موجود" ، كان من الواضح أن هناك شيئاً ما تقول عنه أنه غير موجود، وهو الجبل الذي من ذهب ، وأن الجبل الذي من ذهب لابد أن يكون موجوداً وجوداً ضمنياً في عالم أفلاطوني تكتنفه الظلال ، وإلا لكانت عبارتك عن كون الجبل الذي من ذهب غير موجود ليست بذات معنى(١٠٧).

إلا أن مثل هذا الرأي ينطوي على صعوبات كثيرة لأننا قد نفكر في موضوعات غير موجودة ومتناقضة ذاتياً ، فافتراض مثل هذه الموضوعات يؤدى إلى كسر قانون التناقض، لأننا لو سلمنا بهذا الرأي لسلمنا بأن ملك فرنسا الحالي موجود، وهو أيضا غير موجود، وأن المربع المستدير مستدير وغير مستدير ..... الخ ، وهذا أمر لا يطاق وأن أي نظرية تتجنب هذه النتيجة لابد وأن تكون مفضلة(١٠٨).

إن هذا هو ما دفع رسل إلى أن يتخلى سريعاً عن مثل هذا الرأي ويستنكر لكثير مما سلم به في" أصول الرياضيات " على أساس نظرية الأوصاف(١٠٩)،حيث يقول "رسل" وأنى لأعترف بأن هذه الحجة كانت تبدو لي مقنعه حتى انكشفت لي نظرية العبارات الو صفية، وقد كانت النقطة الجوهرية في هذه النظرية هي أن عبارة "جبل من ذهب" بالرغم من أنها قد تكون من الوجهة النحوية موضوعاً لقضية ذات معنى إلا أن مثل هذه القضية تفقد مثل هذا الموضوع إذا ما حللناها تحليلاً صحيحاً ، فالقضية التي تقول (الجبل الذي من ذهب غير موجود) تصبح دالة القضية "

---

(١٠٦) د. محمد مهران : فلسفة برتراند رسل ، ص ٢٧٩

(١٠٧) برتراند رسل : فلسفتى كيف تطورت ، ص ١٠٠

(١٠٨) د. محمد مهران : المرجع السابق ، ص ص ٢٨٠ ، ٢٨١

(١٠٩) نفس المرجع: ، ص ٢٨٠

س من ذهب وهو جبل كاذبة بالنسبة لكل قيم س " وكذلك العبارة التي تقول" سكوت هو مؤلف ويفرلى "تصبح أياً ما كانت قيمة س ، فإن عبارة س كتب "ويفرلى " مرادفة لـ " س هو سكوت " وهنا لم تعد جملة " مؤلف ويفرلى " ترد في كلامنا(١١٠).

إن الافتقار إلى جهاز دوال القضايا هو الذي أدى في اعتقاد رسل بكثير من المناطقة إلى النتيجة القائلة بأن هناك موضوعات غير واقعية(١١١)؛ فكثير من المناطقة قد انخدعوا بالنحو واعتبروا الصورة النحوية مرشداً أوثق في التحليل مما هي عليه في الحقيقة، وفاتهم أن يدركوا أهمية الاختلافات في الصورة النحوية ، فالقول " قابلت محمداً" والقول " قابلت رجلا " يعبران من الناحية التقليدية عن قضيتين من نفس الصورة ،إلا أنهما في واقع الأمر من صورتين مختلفتين تماما، فالأولى تسمى شخصا فعلياً وهو " محمد " بينما الثانية تتضمن دالة قضية، وتصبح عند تحليلها الدالة " قابلت س ، و س إنساني،صادقة أحيانا(١١٢).

ومن هنا – لابد من تحليل كل القضايا وذلك إن كان الشيء الموضوع بطريقة نحوية سيختفي عند التحليل – فمثلاً عندما نقول أن " المربع المستدير غير موجود، فانه يمكن عند تحليل هذه القضية كمحاوله أولى للتحليل أن تصبح " من الكذب أن هناك شيئاً ما (X) مستدير ومربع(١١٣).

إن الهدف من التحليل هنا هو إستبعاد مثل هذه العبارات التي ليست بأسماء حقيقية وبالتالي استبعاد الكائنات غير الواقعية ، إن كثيراً من القضايا التي كنا ننظر إليها على أنها تأخذ شكل الموضوع والمحمول، إتضح أنها ليست كذلك على الإطلاق وفقاً لنظرية رسل فى الأوصاف ،فقد اثبت رسل أن مثل هذه القضايا لابد أن نفهمها على أنها عبارات وجودية(١١٤) ، فهذه النظرية تقوم بتوضيح هذه القضايا والمغزى الوجودي لها على وجه العموم(١١٥).

---

(١١٠) برتراند رسل : فلسفتي كيف تطورت ، ص ص ١٠٠، ١٠١

(١١١) د . محمد مهران : فلسفة برتراند رسل ، ص ٢٨١

(١١٢) نفس المرجع ، ص ٢٨١

(113) Principia, vo 1, P 66

(114) G.J Warnock , English philosophy since 1900 , oxford ûniversity press, London , 1958 ,P155

(115) Albert William Levi , Philosophy and the Modern World, Indiana university Press, Bloomington pub, New York , 1959, P346

لقد ركز رسل هنا على نقطة هامة جداً قد تكون هي المبدأ الذي يكمن وراء نظرية الأوصاف، هذه النقطة يمكن أن نسميها " مبدأ الإحساس بالواقع"[١١٦].

حيث يقول رسل " لابد لي أن أقرر أن المنطق لا ينبغي أن يسمح بوجود غول أكثر مما يمكن أن يسمح به عالم الحيوان، لأن المنطق يعنى بالبحث في الواقع كما يبحث فيه عالم الحيوان، ولو أن المنطق يبحث في ملامح العالم الأعم والأكثر تجريداً ، والقول بأن للغيلان وجود في أخبار الفروسية أو الأدب أو الخيال هروب من الحقيقة يرثى له ولا قيمة له، ذلك أن ما يوجد في الفروسية ليس حيواناً مكوناً من لحم ودم يتحرك ويتنفس بذاته، بل الموجود صورة أو وصف في ألفاظ[١١٧]، ومن ثم فإنه نزولاً على الإحساس بالواقع سنصر عند تحليل القضايا على عدم السماح بشئ غير الواقع"[١١٨]، فالعبارات ذات المعنى تعتمد في معناها على مكونات ذات معنى ، فمثلا إذا كان لدينا (X)غير موجودة فيبدو أن التعبيرات التي نشير إلى (X) لا يمكن أن يكون لها معنى ، لذلك لا يمكن أن يكون هناك شيء له معنى يمكن أن يقال عن (X)[١١٩].

إن النقطة الرئيسية التي ترتكز عليها نظرية رسل في الأوصاف هي معرفة الفرق بين نوعين من الرموز – وهما أسماء الأعلام و الأوصاف، حيث أن اسم العلم إذا أخذناه بأوسع معانيه فهو رمز تام (بسيط) مثل كلمة "سكوت" والتي تحدد شخصاً معيناً بمفرده، هذا الفرد يكون هو معنى هذه الكلمة ويكون له هذا المعنى دون غيره، ومعنى هذه الكلمة يمكن أن يُفهم منعزلاً عن الكلمات الأخرى. أما الوصف فهو رمز مركب مثل "مؤلف ويفرلى" فهذه العبارة لا تحدد الفرد مباشرة، لأنها إن حددته مباشرة فستكون اسم علم، فهي لا تشير إلى الشيء إشارة مباشرة ، لذلك فان رسل يسمى مثل هذه العبارات بـ "الرمز الناقص"لأنها ليس لها معنى بمفردها حيث تكتسب معناها في سياق الكلمات الأخرى[١٢٠].

فلو أن عبارة "مؤلف ويفرلى" اسم علمٌ فأنها سوف تجعل القضية " سكوت مؤلف ويفرلى " مجرد تحصيل حاصل ، أو أنها شيء كاذب ،حيث لو عوضنا عن " مؤلف ويفرلى "باسم علم آخر مثل

---

(١١٦) د. محمد مهران : فلسفة برتراند رسل . ص ٢٨٠

(١١٧) برتراند رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية ، ترجمة د. محمد مرسى احمد ، مراجعة احمد فؤاد الاهوانى، مؤسسة سجل العرب ، القاهرة ، ١٩٨٠، ص ١٨٣

(١١٨) نفس المرجع ، ص ١٨٤

(119) Stephen Read, thinking about logic , oxford university press, London, 1994,P 124

(120) Morris Weitz, op. Cit., P 94

"سكوت فإن القضية سوف تصبح " "سكوت هو سكوت " وهذا تلاعب بالألفاظ[١٢١].

مما سبق نرى أن العبارة الوصفية كما يرى رسل – يمكن أن تسهم في معنى الجملة دون أن يكون لها معنى بمفردها على الإطلاق ، يقول رسل " يمكننا أن نقيم على هذا في حالة العبارات الوصفية برهانا دقيقا إذا كانت العبارة "مؤلف ويفرلى " تعنى شيئا آخر غير سكوت، فإنه يترتب على هذا أن القضية " سكوت هو مؤلف ويفرلى " قضية كاذبة، وهذا ليس صحيحا، أما إذا كانت العبارة " مؤلف ويفرلى " تعنى سكوت فإن القضية "سكوت مؤلف ويفرلى " تكون تحصيل حاصل وهذا ما ليس صحيحا ، وعلى ذلك فالعبارة" مؤلف ويفرلى" لا تعنى "سكوت" ولا تعنى أي شيء آخر، أى أن "مؤلف ويفرلى" لا تعنى شيئا ، وهو المطلوب إثباته[١٢٢].

وقد ميز رسل بين نوعين من الوصف هما :-

١-الوصف غير المحدد " المبهم " **Indifinited escription**

ويأخذ الصورة كذا و كذا So and So[١٢٣] ، فالعبارة الوصفية غير المحددة تتألف من حد عام في صيغة النكرة أو مسبوقا بكلمات معينة، ومن أمثلته "رجل ما " " بعض الرجال " ، " أي رجل " ، " جميع الرجال " ، كل الرجال "لنفرض أنني قلت " قابلت رجلا " فما الذي أقرره حين أقول هذا القول؟ فلنسلم أن تقريري صادق ، وأننى في الواقع قابلت محمدا فمن الواضح أن ما أقرره ليس هو قابلت محمدا ، فقد أقول قابلت رجلا ولكنه ليس" محمدا " ، فإننى في هذه الحالة لا أناقض نفسي مع أنني أكذب، ومن أتحدث إليه يفهم ما أقوله حتى ولو كان شخصا غريبا ولم يسمع قط عن محمد"[١٢٤]، فالقضية "قابلت رجلا" تختلف تماما عن القضية التي تقول "قابلت محمدا" فالقضية الثانية تسمى شخصا باسمه ، بينما الأولى ليست كذلك ، كما أن القضية الأولى يمكن ترجمتها إلى دالة قضية وهى "قابلت س وأن س رجل صادقة أحيانا، كما أنها لا تقرر وجودا واقعيا لنوع من الكائنات ، وإنما تنطوي فقط على دالة القضية "س إنسان صادقه أحيانا "ومعنى ذلك أننا حين نسند الوجود إلى وصف غير محدد لا نعنى تقرير وجود واقعي محسوس، وإنما أنه توجد حالة واحدة على الأقل مما يجعل دالة ماصادقة[١٢٥].

---

(121) Ibid, P96

(١٢٢) برتراند رسل : فلسفتي كيف تطورت ، ص ص ١٠١، ١٠٢

(١٢٣) برتراند رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية ، ص ١٨١

(١٢٤) د. محمد مهران : فلسفة برتراند رسل ، ص ٢٨٤

(١٢٥) د. محمود فهمي زيدان : المنطق الرمزي – نشأته وتطوره ، ص ٢٣٦

ومن المهم أن نلاحظ أن القضايا التي تحتوى على وصف غير محدد عند تحليلها إلى دالة قضية ، أن الوصف في مثل هذا التحليل لم يعد ظاهراً . حيث أنه قد اختفى تماماً بكل ما يثيره من مشكلات انطولوجية ، وعلى ذلك يقرر رسل "أن "القضايا التي تكون عن "كذا وكذا"بشكل دقيق لا تحتوى – حين يتم تحليلها تحليلاً صحيحاً على أي مكون تمثله هذه العبارة. وهذا هو السبب في أن مثل هذه القضايا قد يكون لها مغزى ،حتى حينما لا يكون هناك شيء ما هو كذا وكذا"[١٢٦].

٢-الوصف المحدد definite description

وهو عبارة عن صوره "the so and so" " الكذا وكذا "(في المفرد).

فالشئ الوحيد الذي يميز "الكذا وكذا"من "كذا وكذا" هو لزوم الإنفراد[١٢٧].

فالعبارات الوصفية المحددة تحدد شيء أو شخص معين، منها على سبيل المثال "أطول تلميذ في الفصل " ،الرئيس الثاني والأربعون للولايات المتحدة[١٢٨] "فالقضايا عن "الكذا وكذا" يلزم عنها دائما القضايا المناظرة عن "كذا وكذا"مع إضافه أن ليس هناك أكثر من كذا وكذا واحد ، وعلى ذلك فالتفرقة بين النوعين لا تتحدد إلا بالنظر إلى صورة العبارة الوصفية. فلو قلنا "الساكن في لندن" لكان وصفاً محدداً ، مع أن هذه العبارة لا تصف في الواقع اى فرداً محدد[١٢٩].

ويرى رسل أن الأوصاف المحددة يجب أن تعرف بطريقة تشبه تلك المستخدمة في الأوصاف غير المحددة، لكنها أعقد[١٣٠].

فالتحليل الذي يقدمه رسل للأوصاف المحددة ليس تحليلاً للعبارات الوصفية وحدها، بل للقضايا التي ترد فيها هذه العبارات ،ولما كانت هذه العبارات لا تعنى شيئاً . فإن تحليل القضايا الواردة فيها لابد أن تختفي فيه هذه العبارات. فحينما يتم تحليل القضية "سكوت هو مؤلف ويفرلى "فإن العبارة الوصفية"مؤلف ويفرلى "سوف تختفي من التحليل.

---

(١٢٦) د. محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص ٢٨٥

(١٢٧) برتراند رسل: مقدمة للفلسفية الرياضية . ص ١٩٠

(128) www. wikipedia.org,definit description

(١٢٩) د. محمد مهران : فلسفة برتراند رسل، ص ٢٨٥

(١٣٠) برتراند رسل : المصدر السابق ، ص ١٨٦

ويتضح ذلك من تحليل رسل للقضية "سكوت مؤلف ويفرلى "إلى القضايا الثلاث الآتية:

(١) هـ كتب ويفرلى صادقة أحياناً ".

(٢) إذا كان هـ ، و كتبا ويفرلى فإن هـ هو و صادقة دائماً ".

(٣) إذا كان هـ كتب ويفرلى فإن هـ هو سكوت صادقة دائماً ".

ويمكن إجمال الدالات الثلاث السابقة في دالة واحدة وهى:-

"(هـ كتب ويفرلى) تكافئ دائماً (هـ كان سكوت)".

ويمكن ترجمة الدالات الثلاث السابقة إلى اللغة المألوفة كما يلي:

(١) شخص واحد على الأقل كتب ويفرلى .

(٢) شخص واحد على الأكثر كتب ويفرلى .

(٣) أن الذي كتب ويفرلى كان سكوت .

ويمكن إجمال القضايا الأخيرة في واحدة وهى " شخص واحد وواحد فقط كتب ويفرلى وأنه كان سكوت.

وكان هدف رسل من هذه الترجمات أن يثبت أن اسم العلم يظهر في التحليل[١٣١] ، أما الوصف فيختفي.

هكذا نجد أن تحليل رسل للقضية التي يوجد بها وصف محدد يتضمن ثلاثة مطالب وهى[١٣٢] :-

١ - الوجود.

٢ - التفرد.

٣ - الاستغراق.

والآن نستطيع أن نقول أن نظرية الأوصاف لرسل قد أصبحت أداة قوية لتنفيذ مهام منطقية وميتافيزقية، ليس هذا فحسب "بل كانت لها أيضاً وظيفة أبستمولوجية (معرفية)"[١٣٣].

---

(١٣١) د. محمود فهمي زيدان : المرجع السابق، ص ٢٤٠

(132) www.metacrawler.com Stanford encyclopedia of philosophy, letter D, Description

(133)Charles A fritz , Bertrand Russll's construction of the external world , P 62

فقد ميز رسل بين نوعين من المعرفة هما المعرفة المباشرة by knowledge acquaintance . والمعرفة بالوصف knowledge by description ، فنرى رسل عندما نعرف شيئاً ما بالمعرفة المباشرة فإنه يقدم لنا مباشرة، لكن عندما نعرفه عن طريق الوصف فلا نحتاج لأن يظهر أمام أعيننا ، لكن يكفى الإشارة إليه بالعديد من الصفات المميزة له مثلما نقول عن شئ أن صفته الكذا وكذا أي عندما نعرف أنه يوجد شيءٌ واحدٌ وليس أكثر له خواص معينة، وهذا يتضمن ألا يكون لدينا معرفة مباشرة بهذا الشيء . والواقع أن جزءاً كبيراً من معرفتنا تعتمد على هذا النوع (أي المعرفة بالوصف)[134]. وترجع أهميه المعرفة بالوصف أيضاً في أنها تسمح لنا بأن نتجاوز حدود خبرتنا الشخصية . وأن نعلم ما هو موجود في نطاق خبرة الآخرين[135].

---

(134) Ibid, P 62

(135) Ibid, P 63

هـ- نظرية حساب الفئات Calculus of classes

قام برتراندرسل بدراسة نظرية الفئات في الجزء الثالث من القسم الأول في المجلد الأول لكتاب"برنكيبيا ماتيماتيكا"[١٣٦]،حيث تحدث عن النظرية العامة للفئات وحساب الفئات ، والفئة الشاملة والفئة الفارغة ، ووجود الفئة.

وبالنسبة لتعريف الفئة ، فقد قدم رسل تعريفين في كتاب البرنكيبيا تعريفاً من ناحية الماصدق ، والآخر من ناحية المفهوم.

١- التعريف الماصدقي للفئة

إن التعريف الماصدقي للفئة يرتبط بدالة القضية ، فالفئة وفقاً لهذا التعريف هي " كل العناصر التي تصدق على دالة قضية ما"، فإذا كان a فئة مكونة من العناصر التي تستوفىΦX ، فإننا هنا نقول أن الفئة a تحددها ΦX، فكل دالة قضية تحدد فئة ما ، وإذا كانت دالة القضية كاذبة دائماً فإن الفئة التي تحددها هذه الدالة تكون خاوية (فارغة) أي لا يكون لها عناصر[١٣٧].

فكل دالة قضية يجب أن تحدد فئة تشتمل على تلك القيم للمتغير التي تكون الدالة صادقة عليها، فإذا علمت – فيما يرى رسل- أية قضية (صادقة أو كاذبة) ولتكن عن سقراط مثلاً . أمكن أن نتصور أن نضع بدلاً من سقراط أفلاطون أو أرسطو أو فرد أو الرجل الذي يعيش في القمر آو أى فرد آخر في العالم . وبوجه عام ستعطى بعض هذه البدائل قضية صادقة وبعضها الأخر قضية كاذبة وستشتمل الفئة المحددة على جميع تلك البدائل التي تعطى قضية صادقة ...، إن كل ما نعنى به في الوقت الراهن هو أن نجعل الفئة محددة بدالة قضية ، وإن كل دالة قضية تحدد فئة مناسبة[١٣٨].

وعلى ذلك فإن تحديد كل فئة ينطوي في الواقع على دالة قضية معينة، ففئة الناس تتحدد بالدالة(س إنسان)إذ يمكننا أن نضع جميع أفراد الناس مكان س " في هذه الدالة ، مثل "أحمد

(136) principia, vo 1, P 187

(137) Ibid, P 23

(١٣٨) برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية . ص ص ١٩٨ ، ١٩٩

إنسان " و " محمد إنسان " .....الخ، ويكون الناتج في كل حالة قضية صادقة ، وبذلك تشكل جميع أفراد الناس فئة " الإنسان " وهكذا يمكننا تحديد الفئة على أنها جميع الموضوعات التي تحقق دالة قضية معينة[١٣٩].

٢-التعريف المفهومي للفئة

يعتمد التعريف المفهومي للفئة على فكرة الفئة كرمز، هذا الرمز يشير إلى الخاصية أو الخواص التي يشترك فيها جميع عناصر فئة ما،لكن دون أن يؤدى بنا هذا القول إلى تصور الفئة رمزا له وجوده المستقل، فالفئات رموز ليست قائمة بذاتها وإنما تكتسب معنى عندما يحتويها سياق أو قضية [١٤٠].

وعلى هذا يقول رسل في كتاب البرنكيبيا "إن رموز الفئات – كرموز الأوصاف تعتبر في النسق الذي وضعناه رموزا ناقصة ، حيث يتم تعريفها حينما نستخدمها ، لكنها في ذاتها لا تعنى شيئا على الإطلاق[١٤١]. ومن ثم فإن الفئات كما قدمناها ما هي إلا وسائل رمزية ولغوية، وليست عناصر حقيقية مثل العناصر الموجودة فيها"[١٤٢].

وبعد أن قدم رسل تعريف الفئة عن طريق الماصدق وعن طريق المفهوم، يرى أننا لا نستطيع أن ننظر إلى الفئة نظرة ماصدقية خالصة أو مفهومية خالصة[١٤٣]،حيث أننا لو أخذنا بالماصدق الخالص، فقد عرفنا الفئة بتعداد حدودها، وفى هذه الحالة لن تسمح لنا هذه الطريقة بالبحث في الفئات اللامتناهية[١٤٤].

---

(١٣٩) د. محمد مهران . مقدمة في المنطق الرمزي . ص ٢٤٤

(١٤٠) د. محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي ،ص٢٠٠

(141) Principia, vo 1, P71

(142) Ibid , P 72

(١٤٣)د. محمد مهران . مقدمة في المنطق الرمزي ، ص ٢٤٣

(١٤٤) برتراند رسل : أصول الرياضيات . الجزء الأول . ترجمة د. محمد مرسى احمد ، د. احمد فؤاد الاهوانى ، دار المعارف بمصر ، القاهرة . ١٩٦٥، ص ١٢٢

ففي خبرتنا الفعلية نستطيع أن نعرف في الغالب الكثير عن الفئة دون أن يكون في استطاعتنا عد أعضائها ، فلا يستطيع أحد عد جميع الناس ولا حتى سكان القاهرة ومع ذلك فنحن نعرف الكثير عن هاتين الفئتين[١٤٥]، وأيضاً فإن هذه الطريقة (النظرة الماصدقيه الخالصة للفئات) تجعل من المستحيل فهم كيف يمكن أن توجد الفئة الفارغة التي ليست لها أعضاء[١٤٦].

وأيضا لا نستطيع تعريف الفئة بالمفهوم على أنها فئة من المحمولات التي تتعلق بالحدود المعطاة دون غيرها ،حتى لا يقع تعريفنا في دور، ولذلك لا يمكننا إلى حد ما مفاداة وجهة نظر الماصدق[١٤٧].

لذلك فقد حاول رسل أن يوفق بين تعريف الفئة بالمفهوم ، وتعريفها بالماصدق حيث يرى أن معنى الفئة إنما يتم حين يتحدد المفهوم والماصدق معاً ، فالخاصية المشتركة بين أعضاء الفئة ، تلك التي تنفرد بها عن غيرها من الفئات ، هي التي تعطي معنى لماصدقات الفئة[١٤٨].

المصطلح الرمزي والعمليات المنطقية لنظرية حساب الفئات

تستخدم نظرية حساب الفئات في نسق البرنكيبيا مجموعة من الرموز كثوابت ومتغيرات وهى كالآتي :-

١- رموز الفئات

يستخدم حساب البرنكيبيا الحروف اليونانية المفردة للإشارة إلى الفئات باستثناء الحروف ذات المعنى الثابت (مثل التي تشير إلى قضايا)[١٤٩] ،حيث استخدم رسل الحروف الثلاثة الأولى من اللغة اليونانية للإشارة إلى الفئات.

---

(١٤٥) د. محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزي ، ص ٢٤٣

(١٤٦) برتراند رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية ، ص ١٩٧

(١٤٧) برتراند رسل: أصول الرياضيات ، الجزء الأول، ص ١٢٢

(١٤٨) د. محمد مهران : المرجع السابق ،ص ٢٤٣

(149) Principia , vo 1, P 23

٢- أعضاء الفئة

ويرمز لها بالحروف X، Y، Z[١٥٠]

٣- عضوية الفرد في فئة

حيث كان يستخدم الحرف الخامس من حروف الهجاء اليونانية للإشارة إلى عضوية الفرد في فئة وهذا الرمز هو ($\in$)، فمثلاً يمكننا أن نعبر عن دالة القضية "X احد أعضاء الفئة α" بالصيغة ($X \in \alpha$)[١٥١].

٤- وجود الفئة

لقد استخدم رسل الرمز ($\exists!$) للإشارة إلى وجود فئة ما ، حيث يقال عن الفئة أنها موجودة إذا كان هناك عضو واحد على الأقل ينتمي إليها ،فإذا كان هناك الفئة "a" فإن نسق البرنكيبيا يستخدم الصيغة ($\exists! \alpha$) للاشاره إلى أن الفئة "a" موجودة [١٥٢].

٥- الفئة الفارغة Null –Class

يقال عن الفئة التي ليس لها أعضاء أنها فئة فارغة، وقد استخدم رسل الرمز (Λ) للإشارة إليها [١٥٣].

٦- الفئة الشاملة Universal Class

وهى الفئة التي تحتوى على كل الأشياء أو الحوادث موضوع الحديث[١٥٤]، وقد استخدم رسل الرمز (V) للإشارة إليها[١٥٥].

---

(١٥٠) د. محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزي ،ص ٣٠١

(151) Principia , vo 1, P 25

(152) Ibid , P 29

(153) Ibid , P 29

(١٥٤) د. محمد محمد قاسم : المرجع السابق ، ص ٣٠٢

(155) Principia , vo 1, P 29

٧-عامل التجريد أو الشمول

وقد استخدم رسل الرمز (^) ليدل به على عملية التجريد abstractor ففئة مدخني السجائر تجريد من الدالة "س مدخن سجائر"[١٥٦].

٨- رمز السلب

وهو (-) ، فالصيغة (a-) نقرؤها (ليس a)[١٥٧]، وسلب الفئة هو صنف الأفراد التي تجعل القضية (X ∈ α) كاذبة ،فإذا أردنا سلب هذه القضية كتبناها على الصورة (X ∈ α) أو (X ∈ α) ونقرؤها أن (x) ليس عضوا فى الفئة (a)

وقد وضع رسل التعريف الآتي للتعبير عن سلب الفئة .

[١٥٨]$-\alpha = \hat{X}\,(X - \in \alpha)\quad Df,$

٩- الضرب المنطقي بين الفئات

فالضرب المنطقي بين فئتين ينتج عنه الفئة التي تتألف من أعضاء الفئتين معا. وقد أشار رسل للضرب المنطقي بين الفئات بالرمز(∩) و يشبه فكرة الربط في حساب القضايا وقد عبر عنه بالتعريف الآتى:

[١٥٩]$a \cap B = \hat{X}\,(X \in \alpha .\, x \in B)\quad Df,$

١٠- الجمع المنطقي بين الفئات

الجمع المنطقي بين فئتين ينتج عنه فئة من هم أعضاء في إحدى الفئتين أو أعضاء الفئتين معاً. ورمزه في نسق البرنكيبيا (U) ومن ثم فهو يشبه فكرة الفصل في حساب القضايا وقد عبر رسل عنه بالتعريف الآتي:-

[١٦٠]$\alpha \, U \, B = \hat{X}\,(X \in \alpha\ .V. X \in B)\quad Df,$

---

(١٥٦) د. محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزى ، ص ٢٤٥

(157) Principia , vo 1, P 27

(158) Ibid , P 27

(159) Ibid , P 27

(160) Ibid , P 27

١١-إحتواء الفئة في أخرى

نقول أن الفئة (α) محتواه في الفئـة (B) إذا كـانت كـل أعضـاء الفئـة a أعضـاء في الفئـة B ، ونعبر عن الاحتواء بالرمز ⊂ فالصيغة $\alpha \subset B$ تعني أن الفئة α محتواه في الفئة B[١٦١].

١٢- المساواة بين الفئتين

ورمزهـا (=) ، وتربـط بـين فئتـين لهمـا نفـس الأعضـاء . وتشـبه فكـرة التكـافؤ (≡) في حساب القضايا إلا أن التساوي ينشأ كعلاقة بين الفئات . بينما التكافؤ يكون بين أعضاء في فئات، وهناك أيضا علاقة عدم المساواة (≠)كمقابل لعلامة المساواة[١٦٢].

يرى رسل أن حساب الفئات يبدأ بثلاثة أفكار أولية . وهى الفئة، وعضوية الفرد في فئة، ودالـة القضيـة[١٦٣]. كمـا أن هـذه النظريـة تحتـوى علـى تعريفـات لأفكـار الضـرب والجمـع والسـلب والاحتواء والمساواة بين الفئات ، لذلك فقد استطاع رسل أن يضع نظرية الفئات في نسق استنباطي على نموذج النسق الاستنباطي لحساب القضايا[١٦٤].

---

(161) Ibid , P 27

(١٦٢) د. محمد محمد قاسم : المرجع السابق ، ص ٣٠٤

(١٦٣) د. محمود فهمي زيدان : المنطق الرمزي نشأته وتطورة ، ص ٢٤٩

(١٦٤) نفس المرجع ،ص ٢٥٧

و- نظرية الأنماط المنطقية
The theory of logical types

بعد اكتشاف رسل التناقض الخاص بفئة الفئات التي لا تكون عضوا في ذاتها والناتج عن الاستخدام المتحرر لدوال الدوال أو فئة الفئات، قدم قاعدة يمكن بواسطتها تقنين مثل هذا الاستخدام ، وكانت هذه القاعدة هي نظرية الأنماط[١٦٥].

ففي عام ١٩٠٨ كتب رسل مقال بعنوان " المنطق الرياضي كما يقوم على نظرية الأنماط mathatical Logic as based on theory of types وبعد عامين قدم في كتاب " برنكيبيا ماتيماتيكا " فصلا كاملا تحت عنوان " نظرية الأنماط المنطقية " وهو الفصل الثاني من مقدمة الطبعة الأولى للكتاب" المجلد الأول "، حيث كان يرى أن هذه النظرية ضرورية لحل التناقضات المنطقية، كما أكد أن هذه النظرية متسقة مع الحس المشترك، حيث أنها قابلة للتصديق تماما[١٦٦].

إن الفكرة الأساسية لهذه النظرية هي أن تقسيم التعبيرات إلى صادق وكاذب ليس أمراً كافياً، بل لابد من وجود فئة ثالثة تتضمن التعبيرات التي ليس لها معنى، وهذا يعد اكتشافاً من أصح وأعمق الاكتشافات في المنطق الحديث[١٦٧]، حيث أننا في المنطق نتحدث فقط عن الأشياء المعروفة والمحدد نمطها تحديداً دقيقاً[١٦٨].

فقد ظهر في المنطق عدداً من التناقضات – حيث انه من الممكن استنباط النتائج المتناقضة من مقدمات يقرها المناطقة جميعاً منذ عهد أرسطو كائناً ما كانت مدارسهم[١٦٩].
وقد اكتشف رسل أحد هذه التناقضات وذلك عندما كان يحاول التوفيق بين برهان " كانتور " من عدم إمكان وجود أكبر عدد أصلي ،وبين الفرض المقبول من أن فئة جميع الحدود لها بالضرورة اكبر عدد ممكن من الأفراد[١٧٠].

---

(165)Morris Weitz, Analysis and the unity of Russell's Philosophy, in the philosophy of Bertrand Russell, by Paul Arthur Schilpp, P37

(166) W . Kneal & M Kneal , The Development Of Logic , P67

(167)Morris Weitz, OP. Cit., P37

(168)Adam Schaff, Introduction To Semantics , Bergamon press , Oxford, London, 1962, P35

(١٦٩) برتراند رسل : فلسفتي كيف تطورت ، ص ٨٩

(١٧٠) برتراند رسل : أصول الرياضيات، الجزء الأول ، ص ١٧٤

فتبعاً لبرهان كانتور فإن الفئة التي يكون عدد حدودها (ن) يكون لها ($٢^{ن}$) من الفئـات الفرعيـة وهذه القضية تظل صادقة حتى حين تكون (ن) لا متناهية[١٧١].

وقد قدم رسل لهذا البرهان بمثال من حياتنا اليومية،حيث يقول " إفرض أن مضيفك قـد خيرك – في نهاية الطعام – بين ثلاثـة أنـواع مـن الحلـوى – ودعـاك لتتنـاول نـوع أو نوعـين منـها أو لتتناول الثلاثة جميعاً حسب مشيئتك ، فكم طريقة من طرق التصرف مفتوحة أمامك ؟ أنـت قـد ترفض الأنواع جميعاً ،هذا اختيارٌ واحدٌ. وقد تأخذ نوعاً واحداً ، وهذا ممكن على أنحاء ثلاثة، ومن ثمة يتيح لك هذا ثلاثة اختيارات أيضاً . وقد تختار اثنين من بينهما ، وهـذا أيضـاً ممكـن على أنحاء ثلاثة . أو أنك قد تختار الثلاثـة جميعـاً وهـذا يتيـح لـك إمكانيـة واحـدة نـهائيـة ، وبذلك يكون مجموع الاختيارات الممكنة ثمانية اختيارات ، أى ($٢^{٣}$). ومن اليسير أن نعمم هـذه العملية الحسابية، فافرض أن أمامك (ن) من الأشياء . وتود أن تعرف عدد الطـرق الـتي يمكنـك بها أن تختار بعض أفراد (ن) ، أو كلها أو لا تختار شيئا منها علـى الإطـلاق، فستجد أن عـدد الطرق هو ($٢^{ن}$) فإذا ما وضعنا هذا المعنى في لغة المنطق قلنا أن الفئة التي عدد حدودهـا ن تتكـون من ($٢^{ن}$) من الفئات الفرعية[١٧٢]،فإذا كانت هناك ثلاثة جزيئات في العالم كان لدينا ٨ فئـات مـن الجزيئات وسيكون هناك ($٢^{٨}$)

أى ٢٥٦ من فئات فئات الجزيئات و ($٢^{٢٥٦}$) من فئات فئات فئات الجزيئات وهكذا[١٧٣]، ومن ثم فليس ثمة عدد أصلى أكبر من سائر الأعداد.

هذا بالنسبة لبرهان " كانتور " أما بالنسبة للفرض الذي يقول أن عدد ما في العالم من أشياء لابـد أن يكون هو اكبر عدد، أي أن فئة جميع الحدود لهـا بـالضرورة أكـبر عـدد ممكـن مـن الأفـراد، فيكون البرهان عليه أننـا إذا استطعنا أن نجمـع في فئـة واحـدة الأفـراد وفئـات الأفـراد وفئـات الفئات وهكذا لحصلنا على فئة تكون فئاتها الفرعيـة ذاتـها اعضـاء، والفئـة المكونـة مـن جميـع الأشياء التي يمكن عدها من أي نوع كانت ،يجب إن وجدت هذه الفئة أن يكـون لهـا عـدد أصلـى هو أكبر ما يمكن. وما دامت جميع فئاتها الفرعية ستكون أعضاء فيها . فلا يمكن أن يكون هناك من الفئات الفرعية أكثر من الأعضاء[١٧٤].

---

(١٧١) د. محمد مهران: فلسفة براترند رسل، ص ٢٧٢

(١٧٢) برتراند رسل : فلشفتى كيف تطورت، ص ص ٩٥ ، ٩٦

(١٧٣) د.محمد مهران: المرجع السابق، ص ص ٢٧٤، ٢٧٥

(١٧٤) برتراند رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية ، ص ١٤٩

مما سبق نجد أن برهان كانتور يتناقض مع هذا المبدأ،وهذا التناقض فيما يرى رسل – خاص بالفئات التي ليست أعضاء في ذواتها .

فقد بدا لرسل أن الفئة تكون أحياناً عضواً في ذاتها وأحياناً لا تكون " فلو أخذت فئة جميع ملاعق الشاي الموجودة في العالم ، لما كانت هذه الفئة نفسها ملعقة شاي، ولو أخذت فئة جميع الكائنات البشرية لما كانت الفئة التي تضمهم جميعاً بدورها كائناً بشرياً . فمن الطبيعي ألا نتوقع أن تكون الفئة الكلية للأشياء عضواً في تلك الفئة[١٧٥].

وأيضاً لو اعتقدت للحظة أن فئات الأشياء يمكن أن تؤخذ بالمعنى الذي تكون فيه الأشياء أشياء . فسيكون عليك أن نقول أن الفئة المكونة من جميع الأشياء في العالم هي ذاتها شيء في العالم وستكون إذا عضوا في ذاتها[١٧٦].

ويعبر رسل عن هذا بقوله " إلا أن الفئة عادة لا تكون عضواً في ذاتها فالجنس البشرى مثلاً ليس رجلاً ، والآن فلنشكل تجمعاً من جميع الفئات التي لا تكون أعضاء في ذواتها، فهل هذه عضو في ذاتها أم ليست عضوا في ذاتها ؟ إذا كانت عضوا في ذاتها، لكانت فئة من تلك الفئات التي ليست عضوا في ذاتها ، أي أنها ليست عضواً في ذاتها وإذا لم تكن عضواً في ذاتها لما كانت واحدة من تلك الفئات التي ليست عضواً في ذواتها أي أنها عضو في ذاتها،وهكذا فان كل فرض من الفرضين– أي أنها عضو في ذاتها ، وليست عضوا في ذاتها – يستلزم نقيضة وهذا تناقض[١٧٧].

إن هذا التناقض يقوم فى اعتقاد رسل – على تكوين ما يمكن أن نسميه "الفئات غير الخالصة" أى الفئات التى لا تكون خالصة بالنسبة النمط ولابد ان يكون الحل بوضع ترتيب هرمى منطقي محدد الفئات، فنبدأ بالفئات التى تتألف كلية من جزيئات ، وتكون هذه هى النمط الأول للفئات ، ثم نسير إلى الفئات التي يكون أعضاؤها فئات من النمط الأول – وتكون هذه هي النمط الثاني وحينئذ نسير إلى الفئات التي يكون أعضاؤها فئات من النمط الثاني ، وستكون هذه النمط الثالث ، وهكذا[١٧٨].

وقد حدد رسل معنى النمط بقوله" إن النمط هو المدى الذي يحتوى على معنى دالة القضية ، بمعنى آخر هو مجموعة الحجج والتي يكون للدالة قيم بالنسبة لها، فكلما جاء متغير ظاهر في

(١٧٥) د محمد مهران : "فلسفة برتراند رسل ، ص ٢٧٣

(١٧٦) نفس المرجع، ص ٢٧٣

(١٧٧) نفس المرجع، ص ٢٧٣

(١٧٨) نفس المرجع، ص ص ٢٧٤ ، ٢٧٥

قضية ما ،فان النمط يكون هو مدى قيم هذا المتغير الظاهر[١٧٩].

أي أن المتغيرات الموجودة في قضية ما هي التي تحدد نمط هذه القضية والأنماط التي نتوصل إليها بهذه الطريقة سوف تكون أنماط جامعة ومانعة أيضاً ، ولا يمكن أن تنشأ تناقضات مادمنا نعرف أن المتغير الظاهر لابد وأن ينحصر داخل نمط واحد[١٨٠].

ومن ثم فإن الدالة التي تكون حجتها عنصراً مفرداً و التي تكون قيمتها قضية من الترتيب الأول سوف تكون الدالة ذات الترتيب الأول، والدالة التي تتضمن دالة أو قضية من الترتيب الأول على أنها متغير ظاهر سوف يطلق عليها "الدالة ذات الترتيب الثاني" وهكذا[١٨١]، حيث يمكن لهذه العملية أن تستمر إلى ما لانهاية.

فما لدينا إذن هو نسق فيه تنظم دوال القضايا ، وبالتالي القضايا في ترتيب هرمي، والمبدأ الذي يتحكم في هذه العملية هو أن ما يمكن أن يقال – صدقاً أو كذباً –عن موضوعات من نمط لا يمكن أن يقال بشكل له مغرى عن موضوعات من نمط مختلف[١٨٢]، فنحن مثلاً حين نسأل" هل هناك أكبر عدد أصلي أم ليس هناك اكبر عدد أصلي ؟ فإن الإجابة تقوم كلية على ما إذا كنا قد حددنا أنفسنا في نمط واحد معين، أم أننا لم نفعل ذلك، ففي أي نمط يكون هناك أكبر عدد أصلي، أي موضوعات ذلك النمط، ولكن سيكون في استطاعتنا دائما أن نحصل على عدد أكبر بالانتقال إلى النمط الأعلى[١٨٣]، معنى ذلك أن نظرية الأنماط لرسل تتفق مع مبدأ نقاء الأنماط ،حيث يجب أن نتحدث فقط عن الفئة ذات الأعضاء المعروفة لنا والمحددة بدقة[١٨٤].

حيث يجب أن تكون الأعضاء المكنة لفئة ما لها نمط موحد[١٨٥] a uniform type، كما أنها توضح أن قولنا بأن فئة الفئات هل هي عضو في ذاتها أم لا ،هو قول ليس له معنى- فالعبارات

---

(179) Bertrand Russell , Logic and Knowledge , Essays 1901 – 1950, edited by Robert Charles Marsh , George Allen & Unwin LTD, London, New York , 1950, P 75

(180) Ibid , P 77

(181) Ibid , P P 77, 78

(١٨٢) د . محمد مهران . فلسفة برتراند رسل، ص ٢٧٤

(١٨٣) نفس المرجع ، ص ص ٢٧٥ ، ٢٧٦

(184) Adam Schaff,introduction to Semantics,P35

(185) D . F Pears, Bertrand Russell , A Collection of Critical Essays,P173

التي تضمن كلمات مثل(كل القضايا)أو(كل الدوال) قد ينشأ عنها تناقضات إذا استخدمت في حالات لا يكون لها معنى(١٨٦).

فاستخدام مثل هذه الكلمات دون الإشارة إلى ترتيب محدد شيء غير مسموح به، فالحديث عن كل الخواص لابد وأن يكون موضع تحكم صارم، لذلك فإن رسل يرى أن خواص النمط لابد من تقسيمها هي الأخرى إلى طبقات، بحيث أن الطبقة الأولى لا يوجد فيها تعريف يتضمن كل الخواص، والطبقة الثانية من الخواص تتضمن فئات من خواص الطبقة الأولى وهكذا – حيث لا تؤخذ إشارة مطلقاً إلى كل الخواص، وعلى هذا فإن حل المفارقات يحتاج إلى التقسيم الفرعي الداخلي للأنماط (أي التشعب في الأنماط)(١٨٧).

وقد استطاع رسل أن يناقش العديد من التناقضات في ضوء هذه النظرية(١٨٨). وأقدم نوع من هذه التناقضات ذلك التناقض المعروف بـ (تناقض إبمنديز الأقريطى) الذي قال (كل الأقريطيون كاذبون) وكل ما قال له الأقريطيون هو بالتأكيد مجرد أكاذيب، فهل هذه كذبه؟ ويمكن أن يقدم هذا التناقض بشكل أبسط بواسطة الشخص الذي يقول(أنا أكذب) فلو كان هذا الشخص يكذب فى قوله فهو يقول الحقيقة (الصدق). ولو كان صادقاً في قوله فإنه يكون شخص كاذب(١٨٩).

وقد ناقش رسل هذه التناقض على أساس نظرية الأنماط، حيث يرى أن الشخص الذي يقول " أني اكذب " إنما يقرر قضية على النحو التالي " توجد قضية أقررها وهي كاذبة " – إن هذا في حقيقة الأمر قول من أقواله، إلا أنه يشير إلى مجموعة أقواله ، ولا تنشأ المفارقة "التناقض " إلا إذا أدرجنا هذا القول في هذه المجموعة، فعلينا إذن أن نفرق بين القضايا التي تشير إلى مجموعة من القضايا و بين القضايا التي لا تشير إلى مجموعة من القضايا ، فالقضايا التي تشير إلى مجموعة من القضايا لا يمكن أن تكون أعضاء في هذه المجموعة، ويمكننا أن نعرف قضايا " المستوى الأول " بأنها تلك القضايا التي لا تشير إلى أي مجموعة من القضايا، أما قضايا " المستوى الثاني " فهي تلك القضايا التي تشير إلى مجموعات من قضايا المستوى الأول(١٩٠) . وهكذا إلى ما لانهاية ، وعلى ذلك فلابد لكذابنا أن يقول " إنني أقرر قضية من المستوى الأول التي هي كاذبة "، إلا أن هذا

---

(186) Bertrand Russell, oP. cit, P 79

(187) A.C Grayling, Russell, a very Short Introduction, Oxford University press, Oxford, 2002, P 42

(188) Principia, vo 1, P 60 - 65

(189) Ibid ,P 60

(١٩٠) برتراند رسل : فلسفتي كيف تطورت ، ص ٩٨

نفسه قضية من المستوى الثاني وعلى ذلك فهو لا يقرر أي قضية من المستوى الأول ، وهكذا فإن ما يقوله هو ببساطة قول كاذب، وتنهار الحجة التي تقول أنه أيضاً صادق.[١٩١]

وهكذا نلاحظ أن نظرية الأنماط طريقة منهجية لتحديد المستويات الخاصة بالقضايا والعبارات، وأن الخلط بين مستوى وآخر لا يؤدى إلى أن يكون القول كاذباً بل بلا معنى.[١٩٢]

وبالنسبة للنظرية بصفة عامة فقط وجهت إليها العديد من الانتقادات والتي من بينها أن نظرية الأنماط المتشعبة تتطلب عدد غير منتهى من التكرارات. فكل مستوى يرتبط بعدد لانهائي من الأعداد الأصلية[١٩٣]، ومثل هذا الموقف يحتاج

للبرهنة على إحدى المبرهنات عند كل مستوى[١٩٤].

ولكي يتجنب رسل هذه المشكلة استخدم بديهية الاختزال **Raducibility**[١٩٥]، والتي وفقاً لها تكون أي مبرهنة أياً كان نمطها تكون متكافئة صورياً مع شكلها " نمطها " الأصلي والذي أمكن البرهنة علية عند أدنى مستويات النمط المسموح به ، لكن إذا كانت المسألة على هذا النحو فإنها تكون غير واضحة حدسياً[١٩٦].

ألا أن رسل قد برر وجود هذه البديهية بأنه لا يرى مخرج آخر لهذه المشكلة التي أوجدتها النظرية.[١٩٧]

لكن على الرغم من هذه الانتقادات فان هذه النظرية جديرة بالمزيد من البحث لما يوجد بها من نفاذ للبصيرة، ولأنها كانت تسعى من الناحية المنطقية لإزالة كل التناقضات المعروفة .

فقد رأى البعض أن هذه النظرية نوعٌ من النظريات الوقائية، والتي تعمل على حماية العلوم الاستنباطية من أن يصبح بها تناقضات سواء المكنة أو المعروفة[١٩٨]

---

(١٩١) د. محمد مهران : فلسفة برتراندرسل ، ص ٢٧٥

(١٩٢) نفس المرجع، ص ص ٢٧٥ ، ٢٧٦

(193) John M. Anderson & Henry W. Johnston , Natural Deduction , the logical basis of axiom system ,Walworth. pub Co. Belmont , California , 1962 , P404

(194) Ibid , P 404

(195) Principia, vo 1, P 59

(196) John M. Anderson & Henry W Johnston , Op . cit , P P 404, 405

(197) D. F pears , Bertrand Russell , a Collection of Critical Essays , P 182

ي- نظرية حساب العلاقات
Calculus of Relation

لقد اكتسبت نظرية العلاقات أهمية عظمى في النسق المنطقي المعاصر ، فهي من أكثر فروع المنطق الرياضي تطورا[١٩٩].

ومن الناحية التاريخية ، يقال أن " طوبيقا " أرسطو ينطوي على نظرية في العلاقات[٢٠٠]. فقد كان أرسطو وأتباعه يحصرون انتباههم فيما أطلقوا عليه اسم القضية الحملية التي قوامها الأساسي موضوع ومحمول ، أى موصوف وصفته وكانوا يردون كل قضية مهما كانت صورتها إلى هذا النوع الواحد الذي شغل أذهانهم ،فإن قلت" سقراط إنسان" قالوا سقراط موضوع وإنسان محمول" وإن قلت قيس أحب ليلى " قالوا قيس موضوع وأحب ليلى محمول " وهكذا[٢٠١].

أما العلاقات التي تربط الأشياء بعضها ببعض والتي تمثل لغة في أحرف الجر وفى الأفعال فلم تظفر منهم بنصيب من التفكير[٢٠٢]، فقد تبين أن الشيء لا يتميز بصفاته فقط ، بل يتميز كذلك بعلاقاته بأشياء أخرى[٢٠٣].

إن نظرية العلاقات لم تأخذ تطورها الكامل إلا منذ القرن التاسع عشر، حيث ساهم كثير من الرياضيين والمناطقة في وضع هذا الجزء الهام من المنطق الحديث ومن أهمهم " دي مورجان " و "بيرس " و "شرويدر " و "فريجة " و " بيانو " ثم توسع " وايتهد " و " رسل " في شرح هذه النظرية في كتابهما برنكيبيا ماتيماتيكا، فقد لقيت هذه النظرية على يد رسل إهتماما كبيرا قد لا نجد له مثيلا عند أى منطقي قبله ،على وجه نستطيع معه أن نقول أن الصورة التي ظهرت بها نظرية العلاقات في كتابات رسل تكاد تكون الصورة الأساسية لهذه النظرية في الوقت الحالي[٢٠٤].

---

(198) A. Jordan & D. Reidal, philosophy and Idology, Dordrecht, Holland, 1963, P 17

(١٩٩) الفرد تارسكى: مقدمة للمنطق ولنهج البحث فى العلوم الاستدلالية، ترجمة د/ عزمى إسلام،مراجعة .د/ فؤاد زكريا ،الهيئة المصرية العامه للتأليف والنشر، القاهرة ١٩٧٠، ص ١٢٧

(٢٠٠) د/ محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزى، ص ٣١٦

(٢٠١) د/ زكى نجيب محمود . المنطق الوضعي ، الجزء الأول ، ص ١٥٠

(٢٠٢) نفس المرجع، ص ١٤٩

(٢٠٣) نفس المرجع ، ص ١٥٠

(٢٠٤) د. محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزى، ص ٣١٦

ويشير إستخدام كلمة (علاقة) إلى دالة قضية ذات متغيرين أو أكثر ، والعلاقة قد تكون ثنائية أو ثلاثية أو رباعية .... إلخ ، وهناك تعريف للعلاقة بالماصدق ظهر عند "بيرس" Peirce، إذ يعرف حد العلاقة بأنه "زوج من الأشياء الجزيئة تربط بينهما علاقة" إلا أن التعريف بالماصدق وحده أمر بالغ التعقيد . لأن التعبير عن أي علاقة في هذه الحالة يستلزم صيغاً مطولة(٢٠٥).

فلفظ "يحب" يتطلب أن يكون هناك فردان يرتبطان بهذه العلاقة هما المحب والمحبوب ، ولفظ " بين" يتطلب ثلاثة حدود ترتبط بهذه العلاقة هي الشيء الذي يكون بين الشيء الثاني والشيء الثالث وهكذا(٢٠٦).

كما أن تعريف العلاقة بالماصدق البحت لا يجعل هناك تمييزاً بين العلاقات والفئات إذ يجعل من العلاقات مجرد نوع خاص من الفئات، لأن العلاقات ستكون في هذه الحالة فئات أزواج (أو ثلاثيات ... الخ)، لهذا فقد عارض رسل هذا الاتجاه الماصدقي للعلاقة(٢٠٧)، ومن هنا جاء تعريف برنكيبيا للعلاقة بالماصدق والمفهوم معاً(٢٠٨)، فتعريف العلاقة على أنها فئة لأزواج من الأفراد في نظر رسل يجب أن يكون له معنى، فالزوج (Y , Z) يختلف عن الزوج (Y, Z) مالم يكن Y= Z ، فهذا الزوج سوف يكون زوجاً مرتباً(٢٠٩).

معنى هذا أنه من خصائص العلاقة بين حدين أنها تسير إن صح هذا القول من حد إلى آخر، وهذا هو الذى يمكن تسميته " جهة "Sense . وهو منبع الترتيب والتسلسل(٢١٠)، ولن يتاح لنا هذا إلا إذا استعنا بعلاقة قائمة بين مفهومات العقل، لكن طالما اقتصرنا على الفئات والمحمولات ، سيظل مستحيلاً علينا أن نفسر ترتيب الأزواج ، وأن نفرق بين زوج مرتب وبين فئة مكونة من حدين دون ترتيب(٢١١).

معنى هذا أن مفهوم" الترتيب " هو الزى يميز العلاقات عن الفئات، ومن هنا يرى رسل أنه يجب قبول هذه الفكرة " آي الترتيب " في العلاقات كفكرة أولية(٢١٢).

---

(٢٠٥) د . محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزى . ص ٣٣٦

(٢٠٦) د . محمد مهران: مقدمة فى المنطق الرمزى، ص ص ٣١٦ ، ٣١٧

(٢٠٧) نفس المرجع، ص ٣١٧

(٢٠٨) د. محمد محمد قاسم: نظريات المنطق الرمزى، ص ٣٣٦

(209) Principia, vo 1, P26

(٢١٠) برتراند رسل : أصول الرياضيات، الجزء الأول ، ص ١٦٦

(٢١١) برتراند رسل : فلسفتى كيف تطورت ، ص ١٠٥

(٢١٢) برتراند رسل : أصول الرياضيات، الجزء الأول ، ص ١٧١

المصطلح الرمزي ، والعمليات المنطقية لنظرية حساب العلاقات :-

إن الثوابت المنطقية المستخدمة في حساب العلاقات هي نفسها المستخدمة في حساب الفئات، مع وضع نقطة فوق كل ثابت وهي كما يلي:-

١- يستخدم رسل حرف كبير للإشارة إلى العلاقة مثل حرف S, R فمثلاً الحرف R هو اختصار لكلمة Relation وقد تم وضع هذا الرمز حتى يكون قريباً إلى اللغة العادية قدر الإمكان[213]، فمثلا يمكننا أن نعبر عن دالة القضية (X يحب y) بالصورة "X R Y" حيث R هي العلاقة بين X, Y .

٢-الضرب بين العلاقات :

وقد وضع رسل الرمز (⩀) للإشارة إلى عملية الضرب بين علاقتين، وقد قدم رسل تعريفاً للضرب بين علاقتين (R،S) وهو:

$$\dot{R} \cap S = x\, y\, (x\, R\, y\, .\, X\, S\, y) \quad Df,$$

ومعناه أن هناك حد "X" يربط بعلاقة R مع الحد Y وأيضاً يرتبط بعلاقة S مع نفس الحد Y .

و يمكن التعبير عن التعريف السابق بتقرير الآتي

[214] $$x\ (R \cap S)\ Y \equiv (x\, R\, y\, .\, x\, S\, y)$$

٣-الجمع بين علاقتين

ورمزه عند رسل (⩁) وقد عبر رسل عن الجمع بين علاقتين (S, R) بالتعريف الآتي:

[215] $$R \cup S = \hat{x}\, \hat{y}\, (x\, R\, y . v .\, x\, S\, y) \quad DF,$$

ومعناه أن الحدين y,x يرتبطان على الأقل بإحدى العلاقتين R أو S

٤- سلب العلاقة

وقد أشار رسل لسلب العلاقة بالرمز(∸) وقد عرف رسل سلب العلاقة كما يلي:

[216] $$\dot{-} R = \hat{x}\, \hat{y}\, \{\sim (x\, R\, y)\} \quad DF,$$

ومعناه أنه ليس هناك علاقة R بين الحدين y, x

---

(213) Principia, vo 1, P 26

(214) Ibid, P 29

(215) Ibid, P 29

(216) Ibid, P 29

٥- التضمن بين العلاقات

وقد رمز رسل للتضمن بين العلاقات بالرمز($\subset$) ولتعريف التضمن بين علاقتين (S,R) وضع رسل الصيغة الآتية:

[٢١٧] $R \subset S = :x R y . x S y \quad DF,$

ومعناه أن العلاقة R متضمنة في العلاقة S إذا كان التسليم بالقول بأن الحد X يرتبط بالعلاقة R مع الحد Y يستلزم أن يكون الحد X مرتبط بالعلاقة S مع الحد y .

٦- وقد استخدم رسل الرمز ($\dot{\exists}!R$) للإشارة إلى وجود العلاقة R والتي تربط بين زوج واحد من الحدود على الأقل[٢١٨].

٧- وقد استخدم رسل الرمز ($\dot{V}$) للإشارة إلى العلاقة التي تنشأ بين حدين ينتسبان إلى أنماط مناسبة ويشكلان معاً عالم المقال ، أما الرمز ($\dot{\Lambda}$) فقد استخدمه للإشارة إلى العلاقة التي لا تربط أى زوج من الحدود مهما كانت، بحيث تشير الصيغة { $X \ \dot{\Lambda} \ Y$ } إلى عدم وجود أى من (X) و (Y) في عالم المقال[٢١٩].

أهم تصورات العلاقة

١- اتجاه العلاقة

يعبر عنه مسار العلاقة ، فإذا قلت" أ أكبر من ب " كان اتجاه العلاقة بادئاً من " أ " وسائراً نحو "ب" يسمى الحد الذي تبدأ العلاقة منه بـ (طرف البداية) كما يسمى الحد الذي تنتهى إليه العلاقة بـ (طرف النهاية)[٢٢٠].

٢- نطاق العلاقة **domain of relation** والنطاق العكسي **Convers domain**

يطلق على فئة الحدود التي لها العلاقة R مع شيء آخر اسم نطاق العلاقة كما يطلق على فئة الحدود التي يرتبط معها شيء آخر بالعلاقة "R" اسم النطاق العكسي ، أي أن نطاق العلاقة هو طرف البداية فيها، والنطاق العكسي هو طرف النهاية فيها[٢٢١].

---

(217) Ibid, P 29

وأيضا د. محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزى، ص ص ٣٢٠ - ٣٢٣

(218) Principia, vo 1, P 29

(٢١٩) د. محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزى ، ص ٣٤١

(٢٢٠) د. زكى نجيب محمود : المنطق الوضعي ، الجزء الأول ، ص ١٥٣

٣-مجال(ميدان) العلاقة field of relation

ويتألف من نطاق العلاقة ونطاقها العكسي معا ، فكل إنسان يكون والدا وكل إنسان يكون إبنا[٢٢٢].

٤-عكس العلاقة Converse Relation

ويقوم بين (X ، Y) إذا كانت العلاقة R تقوم بين (Y,X) ونرمز لعكس العلاقة R بالرمز (R̆) وذلك بوضع الرمز (u) فوق رمز العلاقة[٢٢٣] ،فمثلا العلاقة (...... أب ......) عكس العلاقة (....... ابن ......).

أنــواع العـلاقــات[٢٢٤]

١- العلاقة التماثلية symmetrical relation ، وتقوم بين حدين هـ ، و بحيث يمكن أن تقوم هى ذاتها بين و ، هـ ،أمثلة المساواة ، اللامساواة ، المشابهة، أخ ، أخت ، ابن عم.

٢- العلاقة اللاتماثلية asymmetrical relation ، وتقوم بين هـ ، و بحيث لايمكن قيامها هي ذاتها بين و ، هـ أمثلة فوق ، تحت ، يمين ، يسار ، قبل ، بعد ، أكبر ، أصغر .

٣- العلاقة بين بين non - asymmetrical relation ،وهى علاقة قد تكون تماثلية وقد لا تكون ، مثل " أخ " فإذا كان " هـ" أخ " و " فقد لايكون "و" أخ " هـ " لأنه قد يحدث أن " و " أخت " هـ " ومن أمثلتها أيضا ، يحب ، يكره ، أخت لـ... ، ونستطيع أن نطلق على مثل هذه العلاقات اسم "العلاقات جائزة التماثل".

٤- العلاقة المتعدية transitive relation ، وهى التي إذا كانت تقوم بين "هـ"، " و " كما تقوم ذاتها بين " و " ، " ى " فإنها تقوم بين هـ ، ى.

---

(٢٢١) د. محمد مهران : مقدمة في المنطق الرمزي ، ص ٣١٩

(٢٢٢) د. محمود فهمي زيدان : المنطق الرمزى — نشأته وتطوره ، ص ٢٦٣

(٢٢٣) د. محمد محمد قاسم : نظريات المنطق الرمزى ، ص ٢٣٩

(٢٢٤) د. محمود فهمى زيدان: المرجع السابق : ص ٢٦٤— ٢٦٧

وأيضا د / محمد محمد قاسم . المرجع السابق ص ٣٤٥ — ٣٤٨

٥- العلاقة اللازمة Intransitive relation، وتقوم بين " هـ" ، " و" وتقوم ذاتها بين "و"، "ى"، لكنها لا تقوم بين "هـ" ، "و" . فمثلا إذا كان "هـ أب و" ، "و أب ى" فلا يعنى ذلك أن " هـ أب ى"

٦- العلاقة جائزة التعدي non- transitive relation، وهى ما قد تكون متعدية وقد لا تكون . مثل أخ ، صديق لـ...٠

٧- قد تربط العلاقة بين حدين ، وتسمى حينئذ علاقة ثنائية. وقد تربط بين ثلاثة حدود وتسمى ثلاثية مثلما نقول أن أ يقع بين ب ، ج . وقد تكون العلاقة رباعية كأن نقول " أتمنى أن تقنع مصطفى بزواج ثرية ، حيث يوجد هنا أربع حدود وهى أنا ، أنت ، مصطفى، ثرية ، ومن ثم فإن العلاقة تسمى تبعا لعدد الحدود الموجودة فيها.

٨- علاقة واحد بواحد one – one relation ، وتقوم بين حد واحد على الأكثر وحد آخر على الأكثر .

٩- علاقة واحد بكثير one – many relation ، وتقوم بين حد واحد على الأكثر في طرف البداية وأكثر من حد في طرف النهاية . مثل والد

١٠- علاقة كثير بواحد many – one relation، وتقوم بين أكثر من حد في طرف البداية وحد واحد على الأكثر فى طرف النهاية، مثل ابن.

١١- علاقة كثير بكثير many-many relation وتقوم بين عدة حدود في طرف وعدة حدود في الطرف الآخر مثل "شقيق" فلو قلنا أن " س شقيق ص" لكان من الممكن أن يكون هناك أكثر من شقيق لكل منهما .

وبالنسبة لحساب العلاقات فقد استطاع رسل أن يضعه كنسق استنباطى، يتكون من مجموعة من المقدمات تشمل بعض الأفكار الأولية والتعريفات وبعض المسلمات ثم مجموعة من القضايا يقام عليها البرهان على أساس تلك المقدمات ويجرى ذلك على نفس نمط حساب القضايا وحساب الفئات[٢٢٥].

(٢٢٥) د. محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزى، ص ٣٣٦

تعقيب

لقد استطاع برتراندرسل من خلال نسق " البرنكيبيا " أن يدفع بالمنطق خطوات في طريق التطور، حيث استطاع أن يلم شتات المنطق وينظم أبحاثة وموضوعاته على نحو لم نعهده عند السابقين عليه .

فقد استطاع برتراندرسل أن يضع نظريات المنطق الرمزي الأربع كل على حده في نسق استنباطي دقيق ومحكم ، وأيضا كان له السبق في وضع نظريات جديدة أصبحت تمثل جزءا هاما في المنطق مثل نظريتي الأوصاف و الأنماط.

فعن طريق نظرية الأوصاف استطاع رسل أن يميز بين اسم العلم و الوصف وأن يتخلص من الموضوعات غير الواقعية وذلك عن طريق اللجوء إلى جهاز دوال القضايا عند تحليل العبارة أو القضية.

أما نظرية الأنماط فقد حاول رسل من خلالها التخلص من التناقضات التي ظهرت في المنطق، وذلك عن طريق تحديد المستويات الخاصة بالقضايا، حيث أن كل مستوى إنما يعبر عن نمط خالص بالنسبة لفئة معينة ، والخلط بين المستويات يؤدى إلى عبارات ليس لها معنى ينشأ عنها تناقضات .

لذلك نستطيع أن نقول أن النسق الذي قدمه رسل بالاشتراك مع" وايتهد " في كتاب البرنكيبيا – قد استحوذ على عقول الباحثين في المنطق بحيث يمكننا القول أن نسق البرنكيبيا أصبح يمثل الأساس الذي تنتمي إليه معظم الدراسات المعاصرة في المنطق .

الفصل الثالث

الاتجاه المنطقى عند رسل وموقفه من أهم الاتجاهات المنطقية السائدة فى عصره

محتويات الفصل الثالث

تمهيد

أولاً : الاتجاه المنطقي عند برتراندرسل (في ضوء تفسيره للأعداد).

ثانياً: الاتجاه الصوري وموقف رسل منه.

ثالثاً : الاتجاه الحدسي وموقف رسل منه

تعقيب

تمهيـد:

في النصف الأول من القرن العشرين تطورت ثلاثة اتجاهات أساسية فى مجال تفسير أسس الرياضيات وبيان الصلة بين الرياضيات والمنطق، وهذه الاتجاهات هي:

١-الاتجاه المنطقي **logicism** والذي أسسه فريجة وطوره برتراند رسل

٢-الاتجاه الصوري **formalism** عند هلبرت وتلاميذه

٣- الاتجاه الحدسي **intuitionism** عند بروار وهيتنج

الاتجاه المنطقي عند رسل كان يرى أن الأفكار الرياضية الأساسية يمكن ردها إلى أفكار منطقية.

أما الاتجاه الصوري فقد رأى هلبرت أنه يمكن تدعيم اتساق أسس الرياضيات عن طريق دراسة طابعها البديهي الذي يمثل الأساس الذي تقوم علية الرياضيات، فالرياضيات عند هلبرت ليست مشتقة من المنطق كما هو الحال عند أصحاب الاتجاه المنطقي (اللوجستيقى)، بل أن الرياضيات والمنطق قد نبعا من مصدر واحدٍ أسبق منهما، هذا المصدر هو البدء بعدد من الحدود والمسلمات البعيدة تماماً عن كل معنى رياضي أو منطقي، هذه الحدود أو المسلمات تتكون من رموز ليس لها أي معنى. ومن هذه الحدود والمسلمات (البديهيات) نشتق كل الرياضيات وكل المنطق وذلك بالاستعانة بعدد من القواعد نسميها بقواعد أو شروط اتساق النسق البديهي، وقد أطلق هلبرت على هذه الطريقة اسم "الاكسيوماتيك".

وبالنسبة للاتجاه الحدسي عند بروار وهيتنج فقد خالف أيضاً الاتجاه المنطقي عند رسل، فقد رأي الحدسيون أن المنطق ما هو إلا جزء من الرياضيات وهو أيضاً وسيلة لعرض وشرح ما يتوصلون إليه في الرياضيات .

والحدس القبلي عند أصحاب هذا الاتجاه هو السبيل الوحيد للوصول إلى الاكتشافات الرياضية.

وكان "لرسل " موقفاً من هذين الاتجاهين (الصوري، الحدسي) حيث وجـه إليـهما العديـد من الانتقادات.

وسوف يقوم الباحث في هذا الفصل بدراسة الموضوعات الآتية:-

أولاً : الاتجاه المنطقي عند برتراند رسل (في ضوء تفسيره للأعداد).

ثانياً : الاتجاه الصوري وموقف رسل منه.

ثالثاً : الاتجاه الحدسي وموقف رسل منه.

أولاً : الاتجاه المنطقي عند رسل

في ضوء تعريفه للأعداد

إن ما قام به برتراند رسل أظهر أن الرياضيات يمكن اشتقاقها من المنطق، فالمفاهيم الأساسية في الرياضيات يمكن تعريفها باستخدام الحدود المنطقية.[1] فكل قضية رياضية قابلة للبرهان يمكن ترجمتها إلى قضية تشتمل على رموز منطقية فقط، وأيضا تكون قابلة للبرهان في المنطق.[2] فالمفاهيم المنطقية هي مفاهيم كافية لتعريف كل المفاهيم الرياضية، حيث لا يوجد أعلى ولا أسمى منها في بناء الرياضيات.[3]

إن النسق الذي قدمه رسل وعمل على تطويره، يقوم على اشتقاق كل قضايا المنطق وكل قضايا الرياضيات من مجموعة قليلة من الأفكار المنطقية غير المعرفة، وقد قدمت عملية الاشتقاق هذه الإجابة على السؤال المتعلق بطبيعة المعرفة الرياضية.[4]

فقد بين الرياضيون عندما بحثوا في اعتماد المفاهيم الرياضية على بعضها البعض، أن كل المفاهيم الرياضية يمكن ردها إلى الأعداد الطبيعية.[5] ومن ثم فقد كانت المشكلة الأساسية التي واجهت النزعة المنطقية، هي اشتقاق الأعداد الطبيعية من المفاهيم المنطقية[6].

لقد رأى رسل أن العدد الخاص ليس متطابقاً مع المجموعة التي لها هذا العدد، فالعدد "٣" ليس متطابقاً مع الثلاثي المكون من احمد، وعلى، ومحمد، لأن العدد "٣" شيء مشترك بين جميع الثلاثيات ويميزها عن المجموعات الأخرى.

---

(1)Charles A. Fritz, Bertrand Russell's Construction of The External world, P 20

(2)D.F. Pears, Bertrand Russell, a Collection of Critical Essays, P 180

(3)Ibid, P 176

(4)Charles A. Fritz, OP. Cit., P 18

(5)D.F. Pears, OP.Cit, P 177

(6)Ibid, P 177

فالعدد شيء يميز مجموعات معينة، وهى تلك التي لها هذا العدد[٧]،بعبارة أخرى – العدد "٣" هو فئة لكنة ليس فئة لأشياء، أي ليس منتزعاً مباشرة من الأشياء بحيث يكون هو المقصود الأول منها[٨].

ومن ثم فعندما نبحث في تعريف العدد – فيما يرى رسل – أن نأخذ ثلاثة اعتبارات وهى:–

أولاً: أن الأعداد ذاتها تشكل مجموعة لا متناهية ولا يمكن تعريفها بالسرد (فمثلاً لا يستطيع أن نسرد جميع الرجال).

ثانياً : أن المجموعات ذات العدد المعلوم من الحدود، تشكل بذاتها مجموعة لا متناهية، فمثلاً نفترض أن هناك مجموعة لا متناهية من الثلاثيات في العالم، لأنه لو كان الأمر عكس ذلك، لكان المجموع الكلى للأشياء في العالم متناهياً، وهذا غير منتظر وإن كان محتملاً.

ثالثاً: نريد أن نعرف العدد بطريقة تسمح بإمكان الأعداد اللامتناهية، ويجب إذاً أن نستطيع الكلام عن الحدود في مجموعة لامتناهية، ومثل هذه المجموعة يجب أن تعرف بالمفهوم أي بخاصية مشتركة بين جميع الأعضاء وينفردون بها[٩].

فعملية العد مهما تكن مألوفة، إلا أنها من أعقد العمليات، فضلاً عن إننا نستطيعها للكشف عن عدد حدود المجموعة عندما تكون هذه المجموعة متناهية، ومن ثم فإن تعريفنا للعدد يجب أن لا يفترض مقدماً أن جميع الأعداد متناهية.[١٠]

---

(٧) برتراند رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٦

(٨) د. محمد ثابت الفندى : فلسفة الرياضة، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية١٩٩٠، ص ١٤٩

(٩) برتراند رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٨

(١٠) نفس المصدر، ص ١٨

من هنا افترض رسل الفئة class بدلاً من المجموعة collection ، واتخذ ذلك قاعدة في تعريفة للعدد، حيث كان يرى أن الأعداد ترتبط ارتباطاً كبيراً بالفئات فهي تعبر عن خواص الفئات [11]،فالتعريف بالماصدق ليس ضرورياً لمعرفة الفئة، حيث أن الحديث عن الفئات اللامتناهية غير ممكن باستخدام عملية السرد – حتى من الناحية النظرية – حيث قدر لأي مخلوق أن تكون حياته محدودة الأجل، لأن تعريف الفئة بالمفهوم أمر يسير وذلك عن طريق ذكر خاصية معينة لأعضائها ليست لأي شيء آخر.

لذلك فإن تعريف الفئة بالمفهوم أمر ضروري من الوجهة المنطقية أكثر من التعريف بالماصدق، فالتعريف بالماصدق يمكن أن يرتد دائماً إلى التعريف بالمفهوم، كما أن التعريف بالمفهوم لا يمكن أن يرتد إلى التعريف بالماصدق ولو كان من الوجهة النظرية فقط.[12]فمثلاً الفئة المكونة من (أحمد، على، محمد) جميعهم لهم خاصية معينة ليست لأي شيء أخر في الكون بأكمله، وهى خاصية كونه إما أحمد، أو على، أو محمد. ويمكن استخدام هذه الخاصة كتعريف بالمفهوم للفئة المكونة من أحمد، على، محمد.

فالصيغة "س هو احمد أو س هو على أو س هو محمد" هي صيغة صحيحة لثلاث سينات تماماً هي احمد، على، محمد – ويمكن أن تؤخذ على إنها تعين خاصية مشتركة لأعضاء الفئة المكونة من هؤلاء الثلاثة وينفردون بها، ويمكن أن يقال نفس الشيء عن أي فئة تعطى من جهة ما صدقاتها.[13] والفئة والخاصية المعرّفة لها يمكن من الوجهة العملية وضع أحدهما بدل الأخر في كثير من الأغراض، والفرق الهام بينهما هو أنه يوجد فئة واحدة لها منظومة معلومة من الأعضاء، بينما توجد دائماً خصائص كثيرة بها يمكن

---

(11)Charles A. Fritz, OP.Cit, P 26

(١٢) برتراند رسل : المصدر السابق، ص ١٧

(١٣) نفس المصدر، ص ١٧

تعريف فئة معلومة، فالناس يمكن تعريفهم بذوي القدمين بغير الريش أو الحيوانات العاقلة(١٤).

مما سبق استطاع رسل أن يعرف العدد بقوله "العدد طريقة - بها نجمع معاً مجموعات معينة هي تلك المجموعات التي لها عدد معلوم من الحدود" فقد ننظر إلى جميع الأزواج في حزمة، وجميع الثلاثيات في حزمة أخرى، وهكذا نحصل بهذه الطريقة على حزمات مختلفة من المجموعات، وكل حزمةٍ هي فئةُ أعضائها مجموعات أو فئات، فكل واحدة منها هي فئةُ لفئات، فالحزمة المكونة من جميع الأزواج مثلاً هي فئة لفئات، وكل زوج فئة من عضوين، وحزمة الأزواج كلها لها عدد لا نهاية له من الحدود وكل واحدٍ منها فئة من عضوين، لكن إذا كان الأمر كذلك، فكيف نحكم بأن مجموعتين ينتميان لنفس الحزمة؟ يرى رسل هنا أن الجواب المحتوم على هذا السؤال هو استخراج عدد الحدود في كلٍ منهما، إلا أن هذا يفترض أننا قد وضعنا تعريفاً مسبقاً للعدد، وهذا دور، وحيث أننا لا نستطيع _ دون أن ندور في حلقة مفرغة — أن نستخدم العدد في تعريف الأعداد، لأن الأعداد تستخدم في العد، لهذا فنحن نحتاج لطريقة أخرى لنحكم بها ما إذا كان لمجموعتين نفس العدد من الحدود.(١٥)

وقد رأى رسل أن فكرة "التشابه" **similarity** بين الفئات "المجموعات" هي التي تمكننا من الحكم على ما إذا كانت مجموعتان تنتميين لنفس الحزمة أم لا، فالمجموعتان تكونان متشابهتين إذا وجدت بينهما علاقة تربط بين كل عنصر من عناصر أحد المجموعتين بعنصر معين أخر من عناصر المجموعة الأخرى والعكس صحيح، مثل العلاقة بين مجموعة الجنود ومجموعة البنادق، حيث أن عدد الحدود في إحدى

---

(١٤) نفس المصدر، ص ١٨

(١٥) نفس المصدر، ص ص ١٩، ٢٠

المجموعتين يساوى عدد الحدود في المجموعة الأخرى.[16]

وقد أطلق رسل على مثل هذه العلاقة اسم علاقة "واحد بواحد". حيث يرى أن الفئتين يكون بينهما تشابه عندما تكون هناك علاقة واحد بواحد تربط حدود أحد الفئتين كل واحد منها بحد واحد من الفئة الأخرى وذلك بنفس الطريقة التي بها تربط علاقة زواج الأزواج بالزوجات، حيث أن كل زوج له زوجة واحدة، وكل زوجة لها زوج واحد، والأزواج هنا تسمى "ميدان " علاقة الزوج بالزوجة، والزوجات هم ميدانها والعكسي.
وعلى هذا فإن رسل يصوغ تعريف التشابه بين الفئات كما يلي "يقال أن فئة تشبه أخرى عندما تكون هناك علاقة واحد بواحد ميدانها أحد الفئتين وميدانها العكس الفئة الأخرى."[17]

إن هذا التشابه أو التساوي عند رسل لا يفترض وجود العدد "١"، حيث أن الكثير قد أنتقد رسل في هذه النقطة من حيث أن التشابه يفترض علاقة واحد بواحد، حيث يرون أن تعريف رسل يحتوى على دور، لأنه يفترض استخدام العدد (١) في التعريف، إلا أن رسل ناقش هذه المسألة وأوضح أنه من الضروري أن نميز بين الحد **term** و"١"حيث أن الحد غير قابل للتعريف، في حين أن "١"<u>يمكن تعريفة</u>[18]: هو حزمة تلك الفئات التي لها خاصية كونها مشتملة على أي شي يكون متطابقاً مع حد ما س.[19]
أما الحزمة التي تشمل الفئة التي ليس لها أعضاء ستكون هي العدد (صفر) والعدد(٢) هو الحزمة المكونة من جميع الأزواج، ثم حزمة مكونة من جميع الثلاثيات وهكذا [20].
وإذا ما تم تعريف الأعداد الطبيعية فإنه يتم بعد ذلك اشتقاق الأعداد الأخرى مثل الأعداد السالبة والموجبة والكسور والأعداد الحقيقية والأعداد المركبة.[21] فمثلا الكسور في سلسلة

---

(16)Charles A. Fritz, OP.Cit., P22

(١٧) برتراند رسل.مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ٢١

(18)Charles Afritz, OP.Cit., P 27

(١٩) د. محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، ص ٢١٨

(٢٠) برتراند رسل : المصدر السابق ص ص ٢٢،٢٣

الأعداد الطبيعية هي علاقات بين أعداد صحيحة ناتجة عن القسمة، والأعداد الحقيقية هي طوائف من الأعداد الطبيعية تتكون من كل ما يعلو على الصفر حتى نقطة معينة.(٢٢) أما الأعداد المركبة فيمكن أن تعتبر أزواجاً من الأعداد الحقيقية مستعملين لفظ "زوج" بمعنى أن هناك حداً أول وحداً ثانياً، أي بالمعنى الذي يكون فيه ترتيب الحدود جوهريا.(٢٣)

وقد استطاع رسل بعد ذلك أن يقدم تعريفاً للأعداد بصفة عامة على أنها واحدة من الحزمات التي فيها يجمع التشابه الفئات، وسيكون العدد منظومة من الفئات، أو بعبارة أخرى "العدد هو أي شيء هو عدد فئة ما".(٢٤) وقد يقال أن مثل هذا التعريف دائري – إلا أن الحقيقية غير ذلك حيث أننا نعرف عدد فئة معلوم، دون أن نستخدم مفهوم العدد بصفة عامة، لذلك يمكننا – فيما يرى رسل– أن نعرف العدد بصفة عامة بدلالة "عدد فئة معلوم" دون أن نقع في أي خطأ منطقي، حيث أن التعاريف التي من هذا القبيل شائعة جداً، فمثلاً فئة الآباء يجب أن تعرف بأن نعرف أولاً ما هو أن يكون أباً لشخص ما.(٢٥) إن تعريف رسل للأعداد له أهمية خاصة، حيث أنه جعل الأعداد عبارة عن كيانات قابلة للتعريف.(٢٦) كما أنه يمتاز – في اعتقاد رسل – بميزات متعددة، فهو يتغلب على جميع المشكلات التي أثيرت حول الصفر والواحد.(٢٧)، وأيضا يتغلب على المشكلات المتعلقة بالواحد والكثير، فما دامت الحدود المعدودة تكون معدودة بوصفها حالات جزئية لدالة

(21)D.F. Pears, Bertrand Russell, A Collection of Critical Essays, P 178

(٢٢) برتراند رسل : فلسفتي كيف تطورت، ص ٨٦

(٢٣) نفس المصدر، ص ٨٦

(٢٤) براتراند رسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ص ٢٣، ٢٤

(٢٥) نفس المصدر ، ص ٢٤

(26)Charles A. Fritz, Bertrand Russell's construction of the external world, P 31

(٢٧) د. محمد مهران، المرجع السابق، ص ٢١٨

قضية، فإن الوحدة التي تتضمنها ليست إلا وحدة دالة القضية التي لا تتعارض بأي طريقة من الطرق مع كثرة الحالات الجزئية.

وأيضا هناك ميزة أخرى أكثر أهمية في تعريف رسل للعدد وهى أن هذا التعريف يخلصنا من الأعداد بوصفها كائنات ميتا فيزيقية، ونصبح مجرد وسائل لغوية مريحة، لا تعبر عن أي جوهر إلا مقدار ما تعبر عنة ألفاظ مثل "الخ" و"أي أن" وبهذا التعريف يرتد النسق الأولي الذي يستخدمه الرياضي إلي حدود منطقية خالصة.(٢٨)

(٢٨) نفس المرجع ، ص ص ٢١٨، ٢١٩

ثانياً : الاتجاه الصوري

Formalism

يعد الاتجاه الصوري من أهم المدارس التي تناولت بالبحث أسس الرياضيات، وقد تزعم هذا الاتجاه ديفيد هلبرت (١٨٦٢-١٩٤٣) والذي كان يشغل منصب أستاذ الرياضيات بجامعة برلين، حيث دخل حلبة الصراع التي دارت حول أسس الرياضيات نتيجة لإعجاب تلميذة المفضل "هيرمان فايل" (١٨٨٥-١٩٥٥) بالنزعة الحدسية لدى براور (١٨٨١-١٩٦٦).[٢٩]

لقد قدم هلبرت برنامجاً من أجل تأسيس الرياضيات يهدف إلى جعل كل الرياضيات صورية في شكل بديهي.[٣٠]

فالرياضيات عند هلبرت لا تتطلب أي حدس أولي، كما أن الرياضيات عنده لا تحتاج إلي بديهية الاختزال "الرد"وبديهية اللا تناهي كما هو الحال عند رسل ووايتهد.[٣١]

لقد حاول هلبرت ألا يعود إلى أساس كحدس الاتصال الذي فارقته الرياضيات منذ فترة طويلة.[٣٢]وأيضاً على الرغم من تأثره بأعمال بيانو وكذلك أعمال رسل ووايتهد، إلا أنه رأي أنه إذا كانت مسألة اختزال الرياضيات إلى منطق أمراً ناجحاً، إلا أن هذا سيترك

(29)WWW.Wikipedia.org, formalism

(30)WWW.metacrawler.com, Stanford Encyclopedia of philosophy, letter F, formalism

(٣١) ديمتريو : تاريخ المنطق، الجزء الرابع، ترجمة ودراسة وتعليق د/ إسماعيل عبد العزيز، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة ، ١٩٩٧، ص ٨٣

(٣٢) د. محمد ثابت الفندى، فلسفة الرياضة، ص ١١٨

مسألة اتساق الرياضيات أمرا بلا حسم.[٣٣] ومن هنا يمكن القول أنه من أهم الاعتبارات التي أدت إلى ظهور الاتجاه الصوري لدى هلبرت هو مشكلة الاتساق في الرياضيات[٣٤].

فقد كان لدى هلبرت الرغبة في إيجاد وبناء رياضيات محكمة لا تؤدى إلى تناقضات، وكان لديه الشعور بأن هذا يمكن تحقيقه بأفضل ما يكون عن طريق المنهج البديهي، والذي ثبت نجاحه في علم الهندسة[٣٥].

وهذه الفكرة عند هلبرت تعد تطورا ناتجا عن أعماله الأولى حول بديهيات الهندسة، فلكي يضمن خلو الرياضيات من التناقض قام باستخدام المنهج البديهي الموجود في كتابه "أسس الهندسة"، إلا أنه في هذا الكتاب كان الاتساق مضمونا فقط إذا لم يتضمن عدم الاتساق، وبرهان مثل هذا لا يزال ناقصا لذلك فقد رأى هلبرت أنه لا بد من وجود مدخل جديد[٣٦]. وهذا المدخل هو القول بقبول حدود ومسلمات أولية لا هي إلى المنطق ولا هي إلى الرياضيات، وإنما هي مستبعدة تماما عن كل معنى منطقي أو رياضي لأنها مجرد رموز أسمية، ومن ثم تكون صورية خالصة منها تشتق الرياضيات والمنطق معا، وتلك الحدود والمسلمات التي لا هي إلى الرياضيات ولا هي إلى المنطق تسمى "الاكسيوماتك"[٣٧].

ونحن نستنبط من هذه الحدود الأولية القضايا المشتقة التي نستخلصها في نظام تسلسلي محكم بحيث تعتمد كل قضية لاحقة على ما سبقها حتى لا يختل نظام أو ترتيب أي قضية

---

(33)Raymond L. Wilder, Introduction To The Foundations Of Mathematics, P 264

(34)Theodore J. Benac Friedrien, Introduction to Mathematical Thinking – the formation of concepts in Modern Mathematics, Translated by Friedrich Waismann, F.Ungar Pub. Co., New York, 1951, P 100

(35)Louis O. Kattsoff, a philosophy of Mathematics, Iowa state college press, Ames, 1948, P 117

(36)Raymond L. Wilder, OP.Cit., P 264

(٣٧) د/ محمد ثابت الفندى: المرجع السابق، ص ١٥٦

أو تترك وضعها لكي تحتله قضية أخرى، وبحيث لا يُستند في البرهنة على أية قضية إلى أصول أو مسلمات أو قضايا خارجة عن تلك الموجودة في إطار النسق الاستنباطي[٣٨].

إن الرياضيات عند هلبرت عبارة عن لعبة ذات رموز مختارة بطريقة تعسفية تخضع لشروط الاتساق وفق قواعد تعسفية.[٣٩]

وعلى هذا فالرياضيات عند هلبرت تشبه لعبة الشطرنج بحيث يمكننا وضع قواعد لتحريك الاعبين حسب رغبتنا وبحيث لا تؤدى هذه القواعد فى النهاية إلى تناقضات صورية[٤٠].

فبتحليل المفاهيم والعمليات الرياضية، وتمثيلها برموز مناسبة يكون لدينا القدرة على توضيح أن صيغة التناقض لا يمكن الوصول إليها من الصيغ الأساسية والقواعد الموضوعة للتعامل مع تلك الصيغ[٤١].

لقد قابل هلبرت الأزمة التي حدثت في أسس الرياضيات عن طريق ابتكاره نظرية جديدة للبرهان – يبرهن بها على اتساق الرياضيات، حيث فكر فى العمل مع الصيغ وليس المضمون.[٤٢] فالرياضيات عنده ما هي إلا معالجة ميكانيكية للرموز التي لا تشير لأي كيانات[٤٣]، كما أن عملية التفكير هي نوع من البرهان، وأن البرهان عبارة عن تغيير وضع الرموز وفق القواعد التي تؤثر فيها.[٤٤]

---

(٣٨) د/ على عبد المعطى محمد، د/ محمد محمد قاسم : المنطق الرياضي الأسس والتطور والنظريات، ص ص ٢٩٣، ٢٩٤.

(39) Louis O. Kattsoff, OP. Cit., P 116

(40) Ibid, P 116

(41) Raymond L. Wilder, OP. Cit., P 264

(42) Reuben Hersh, What is Mathematics, Really, Oxford University press, New York 1999. P. 159

(43) Louis O. Kattsoff, OP. Cit., P 117

(44) Martin D. S. Braine & David P.O. Brien, Mental Logic, Lawrence Erlbaum associates, New Jersey, 1998, P 16

وبالنسبة لهذه الرموز فلا يرى الصوريون فرقاً جوهريا بين الصيغ المنطقية والصيغ الرياضية، حيث أنهم يفهمونها بشكل صوري، ويعتبرون النسق المكون من هذه الرموز نسقاً رمزياً – والرموز في هذا النسق لا تلعب أي دور، لكن عدم التناقض هو أهم شيء في هذا النسق.(٤٥) والصيغ المعينة التي تقوم كحجر أساس للصرح الصوري للرياضيات هي ما يسمى عندهم بالبديهيات، وهذه البديهيات كما يرى هلبرت هي المدخل والأسلوب الصحيح لتطوير أي موضوع علمي بشكل دقيق.(٤٦)

ومن هنا لابد لنا أن نلاحظ أن هذه النظرية الاكسيوماتيكية من حيث هي "صورية" تتفق – أو بتعبير أدق – تتجاوب مع حركة عامة مضاهية لها في العلوم الطبيعية نحو تجريد أكبر وصورية متزايدة يصحبها ليس فقط دقة في التحقيق التجريبي من النظريات العلمية بل كذلك عدم معقولية متزايدة للتصورات المستعملة في العلم، فالطبيعيات الحديثة لا تميل إلى تفسير العالم ولا إلى أن تصفه وإنما بدلاً عن ذلك كله تهدف إلى استعراض بنيانه **structure** فقط باستعمال الرموز التي لا معنى لها، أي لا تعقل وهي منفصلة بعضها عن بعض بقدر ما تعقل فقط عند الارتباط بعضها مع البعض في معادلات تبين استعمالها وبالتالي معانيها.

إن هذا الميل المتزايد من علماء الطبيعة نحو البنيان الرمزي للعلم وما تتضمنه الاقترانات المختلفة للرموز من معان، له صداه أو قل له شبيه عند هلبرت وتلاميذه من الاكسيوماتيكيين المعاصرين الباحثين في أسس الرياضيات.(٤٧)

وبالنسبة لاختيار البديهيات في النسق الاكسيوماتيكي عند هلبرت فإنه يخضع لثلاثة اعتبارات وهي:–(٤٨) :

(45)I. M Bochenski, A History of Formal Logic, P.292

(46)www.metacrawler.com, Stanford encyclopedia of Philosophy, OP.Cit.,

(٤٧) د/ محمد ثابت الفندى، المرجع السابق، ص ١٥٦، ١٥٧

١- إن البديهيات يجب أن تكون مستقلة أو بعبارة أخرى أنه لا ينبغي أن يكون من الممكن استنباط بديهية من أخرى، لأنه في هذه الحالة سيزداد عددها ويتطلب الأمر اختزالها .

٢- أنه ولابد أن تكون عدد البديهيات كافياً، بحيث يسمح باستنباط البرهان من أي نظرية.

٣- يجب إلا تكون البديهيات متناقضة، ويعد هذا الشرط من أكثر الشروط أهمية في أي نسق بديهي، وإن كان هذا الشرط أيضاً يعد من أصعب الشروط.

وبناءاً على هذا فإن المشكلات الرئيسية لأي نسق اكسيوماتيكي تكون علي النحو التالي(٤٩):-

١--البرهنة على عدم تناقض البديهيات.

٢-البرهنة على استقلالها.

٣-البرهنة على اكتمالها .

وبالنسبة للشرط الأول وهو البرهنة على عدم تناقض البديهيات فقد عرف هلبرت عدم التناقض بقوله أنه "استحالة استنباط قضية ما تناقض تلك المسلمات أي تكون نفياً كلياً أو جزئياً لإحدى المسلمات" إذ لا يمكن البرهنة مباشرة على عدم تناقض المسلمات فيما بينها وإنما يكون ذلك فقط بطريقة غير مباشرة وهو عدم العثور على قضية مستنبطة منها وتكون نفياً لأحداها.(٥٠)

لكن مثل هذا البرهان ليس أكيداً ولا حاسماً لأننا إذا كنا لا نعثر في الحالة الحاضرة لطائفة من المسلمات الخاصة بنظرية رياضية ما على أي قضية مستنبطة منها تكون متناقضة معها، فإننا لا نستطيع أن نجزم باستحالة ذلك في مستقبل قريب أو بعيد.

---

(٤٨) ديمتريو : تاريخ المنطق، الجزء الرابع، ص ٨٣

(٤٩) نفس المرجع ، ج ٤ ، ص ص ٨٣، ٨٤

(٥٠) د/ محمد ثابت الفندى، المرجع السابق، ص ٧٧

إن مثل هذا الاعتراض جعل هلبرت يفكر فى طريقة أخرى مباشرة للبرهان على عدم تناقض طائفة من المسلمات فيما بينها، وهذه الطريقة هي أن نعطى المسلمات تفسيراً مشخصاً في هذا العالم فنبين أنه توجد أشياء في عالمنا هذا تنطبق عليها المسلمات.(٥١)

فالعديد من كتابات وحوارات هلبرت أظهرت اقتناعه الكامل بأن المشكلات الرياضية تدور عن أشياء حقيقية ولها حلول وإجابات تصدق على نفس النحو الذى تصدق به أي عبارة عن الواقع.(٥٢)

وقد وضح هلبرت موقف الصوريين من الوجود **existence** من حيث أن تأكيد وجود الشيء يتحدد بإثبات اتساقه، وفى الواقع تكون العبارة صادقة (أو المسلمة) لو اتضح أنها لا تؤدى إلى تناقض.(٥٣)

وقد عبر هلبرت عن هذا الرأي في خطاب أرسله إلى "فريجة" حيث قال فيه إنك كتبت (يقصد فريجة) أنه من صدق البديهيات ينتج عن عدم تناقضها مع بعضها البعض، إلا أنني من جانبي أقول غير هذا، فإن لم تكن البديهيات الموضوعة بطريقة تعسفية متناقضة مع مجموع نتائجها فإنها تكون صادقة والأشياء التي تشير إليها تكون موجودة، فهذا هو محك الصدق والوجود بالنسبة لي(٥٤).

وبالنسبة لشرط استقلال كل مسلمة عن الأخرى "فإن مسلمة ما تعتبر مستقلة عن الأخرى إذا كان نفيها يؤلف مع هذه المسلمات الأخرى مجموعة غير متناقضة"(٥٥). بعبارة أخرى نقول أن برهان استقلال المسلمة "س"عن المجموعة "ص" إنما معناه عدم تناقض ص مع "لاس".(٥٦)

---

(٥١) نفس المرجع، ص ٧٧

(52)Reuben Hersh, OP. Cit., P 160

(53)Louis O. Kattsoff, aphilosophy of Mathematics, P 122

(54)I.M. Bochenski, OP.Cit., P 292

(٥٥) د/ محمد ثابت الفندى : فلسفة الرياضة، ص ٧٨

(٥٦) نفس المرجع، ص ٧٩

وشرط الاستقلال شرطٌ هامٌ وأساسيٌ لأنــه لـو تداخلـت الأصـول الأولى لأدى هـذا إلى تداخـل وغمـوض فيمـا يتعلـق بالقضايـا الـتي نستنبطها كلـها مـن هـذه الأصـول الاكسـيوماتيكية المتداخلة، فيجب إذن أن تكون المسلمات الأولى مستقلة تماماً عن بعضها البعض.(٥٧)

ويعترض بعض الريـاضيين علـى فكـرة الاسـتقلال نفسـها فيقولـون إذا كـانت كـل مسـلمة مستقلة حقاً فى معناها عن غيرها فى طائفة من المسـلمات، فإنــه يمتنـع الاسـتنباط بسـبب عدم الاشتراك أو الاتصال بين معاني مسلمات الطائفة المذكورة، إذن فلابـد أن يكـون هنـاك اشتراك ما — لا استقلال أو انفصال تام — بين طائفة مـن المسلمات بحيـث يمكـن اسـتنباط قضايا أو نظريات منها، وهذا الاشتراك ربما أمكن فهمه في ضوء التمييز الـذي ذهـب إليـه الرياضي الإيطـالى "بيبـو ليفـي Beppo Levi بـين الاسـتقلال المطلـق والاسـتقلال المرتب، أما الاستقلال المطلق فمسـتحيل معـه الاسـتنباط لأن المسـلمات تكـون حينئـذ غـير مشتركة في شي ما، أما الاستقلال المرتب فهو الذي إذا توافر لدينـا "أ ب جــ" كطائفـة مـن المسلمات لنظرية ما، يريد ببساطة أن يقول أن "ب" لا تنتـج عـن "أ" وأن "ج" لا تنتـج عـن "ب" أي أن هناك ترتيباً في الاستقلال كما هو واضح، وهذا لا يمنع بـالطبع إمكـان اسـتنباط "أ "من "ب" و"ج"معاً ومثل هذا هو ما يسمح بالاشتراك بعض الشيء في المعنى.(٥٨)

أما الشرط الثالث والأخير من شروط النسق البديهي عند هلبرت فهو شرط الاكتمـال، وقـد عرف هلبرت الاكتمال هنا بقوله إن أي صيغة لم يبرهن عليها في نسق ما، فإن أضافتها إلى هذا النسق يؤدى إلي تناقض.(٥٩)

---

(٥٧) د/ على عبد المعطى محمد، د/ محمد محمد قاسم، المرجع السابق، ص ٩٥

(٥٨) د/ محمد ثابت الفندى، المرجع السابق، ص ٧٩

(59)D. Hilbert &W Ackrmann, Principles of Mathematical Logic, P 92

بمعنى آخر يمكن القول أن شرط الاكتمال يعنى أن الأصول الأولى أو المسلمات يجب أن تكون كافية بحيث تسمح لنا بإجراء كل عمليات الاستنباط فى النسق الموضوعة له.(٦٠)

وقد توسع هلبرت بعد ذلك في معنى الاكتمال بحيث تضمن فكرة أن أية مسألة أو نظرية تثار في داخل فرع ما يجب أن يفصل فيها بالسلب أو بالإيجاب على أساس تلك المسلمات نفسها.

مما سبق نرى أن شروط اختيار البديهيات فى النسق الاكسيوماتيكى عند هلبرت متصلة ومتداخلة فيما بينها، كما أنها أيضاً لا تزال موضع نظر من قبل من يهمهم الأمر بحيث يعسر أن يبت فيها بكلمة نهائية وفاصلة من وجهة نظر الرياضيين أصحاب الشأن.(٦١)

ونظراً لأن كل فرع الرياضيات تعتمد على الحساب، فقد قام هلبرت بتأسيس فكرة الأعداد على أسس اكسيوماتيكية، حيث أن أي محاولة فى نظره لتعريف الأعداد على نحو منطقي بحت هو اتجاه خاطئ.(٦٢) لهذا فقد اعتمد فى تفسيره للأعداد على الصياغة الناتجة للهندسة كتركيب بديهي.(٦٣)

فالأعداد عند هلبرت يمكن إدراكها بصفة عامة بعيداً عن الزمان والمكان، فالأعداد ليست أشياء فيزيقية، وإنما هى لمسات على الورق بحيث يمكن امتداد العد بإضافة لمسة أخرى وهكذا، فمثلا الأعداد ذات المضمون إنما هى علامات على النحو التالي:-

1,11,111,1111,11111

وأهم شيء فى هذا الصدد هو عملية التسلسل، ومن هنا فالأعداد 111,11 يتم معرفتها 2+3، والأعداد 111و11 يتم معرفتها على أنها 3+2 ويتم تعميم العمليات الأساسية الأخرى على أنها عمليات يتم معرفتها بالتكرار (مثل عملية الضرب ورفع الأس).(٦٤)

---

(٦٠) د/ على عبد المعطى، د/ محمد محمد قاسم، المرجع السابق ص ٩٥

(٦١) د/ محمد ثابت الفندى : المرجع السابق ، ص ٨٠

(62)Louis O. Kattsoff, OP.Cit., P 118

(63)Ibid, P 118

(64)www.metacrawler.com, OP.Cit

ويبدأ النسق الصوري عند هلبرت بحساب القضايا حيث يستعمل الرموز التي عرفناها عند رسل، فحساب القضايا عند هلبرت في الواقع هو نفس حساب القضايا عند وايتهد ورسل والموجود فى كتابهما "برنكيبيا ماثيماتيكا" ولكن مع أجراء بعض التعديلات الطفيفة كما يلى(٦٥) :-

١- الأفكار الأولية :

حيث يستخدم الرموز x,y,z .... كمتغيرات قضوية يمكنها أن تأخذ قيمتين، صادق وكاذب.

V ويشير إلى الفصل

& ويشير إلى الوصل

→ ويشير إلى اللزوم

≡ ويشير إلى التكافؤ

_ ويشير إلي النفى حيث أنه إذا كانت X قضية فإن $\overline{X}$ تكون نفيها

٢-البديهيات:

وهى:

a-x v x → x

ومعناها أن الفصل المنطقي بين القضية ونفسها يلزم عنه نفس القضية.

فالقضية المركبة التى تقرر "X أو X"حيث أنX قضية، يلزم عنها نفس القضية "X"

b – x → x v y

ومعناها أن القضية"X" يلزم عنها القضية المركبة التي تقرر القضية "X" أو القضية "y"

c – x v y → y v x

ومعناها أن القضية المركبة التي تقرر"القضية "x" أو القضية y يلزم عنها القضية المركبة التي تقرر "القضية" y أو القضية x

d-(x → y) → [z v x → z v y]

(٦٥) ديمتريو : تاريخ المنطق ، الجزء الرابع، ص ص ٨٧، ٨٨

وهذه البديهية تقرر أن القضية المركبة التي تقول "إن القضية x يلزم عنها القضية" y " هذه القضية يلزم عنها القول بأن القضية المركبة التى تقرر "القضية z أو القضية x" يلزم عنها القضية المركبة التي تقرر "القضية z أو القضية y" .

وهذه البديهيات إنما هي صادقة (تحصيلات حاصل)

٣-قواعد الاستنباط

وهما قاعدتين:-

أ-قاعدة الاستبدال

ب-قاعدة الاستنباط (إثبات المقدم **Modus Ponens**)

وباستخدام هذه البديهيات وقواعد الاستنباط يمكن الحصول على صيغ جديدة، وتكون صحيحة بشكل مستقل عن قيم صدق المتغيرات المؤلفة منها، بعبارة أخرى أنه يمكن الحصول على كل حساب القضايا عند رسل ولكنه مكتوب برمزية معدلة، علاوة على ذلك يمكن البرهنة على عدم تناقض وأيضاً استقلال واكتمال البديهيات.

وقد تحدث هلبرت عن حساب المحمول، حيث أن الدالة f (x) تعني ببساطة عنده أن "x" تحوز المحمول "f" .

أما بديهيات حساب المحمول فهى نفس البديهيات الأربع لحساب القضايا بالإضافة إلى بديهيتين تختصان بـ"كل" و "يوجد" وهما:-[٦٦]

$$e - (x)\, f(x) \rightarrow f(y)$$

ومعناها أنه إذا كان المحمول f منطبقاً على كل "X" فإنه ينطبق أيضا عشوائياً على "y"

$$f - f(y) \rightarrow E(x)\ \ f\ \ (x)$$

وهذه البديهية معناها أنه إذا كان المحمول " f" مناسباً لفرد وليكن " y" فإنه يلزم عن ذلك وجود X .

---

(٦٦) نفس المرجع، ص ٩١

لقد دافع هلبرت عن التأويل الصوري للرياضيات حيث رأى أنه هو ثمن الوصول إلى اليقين، فكان يرى أن الهدف من نظريته هو حسم يقين المناهج الرياضية حسماً تاماً ونهائياً، حيث أن وضع الرياضيات في وجود المفارقات هو وضع لا يمكن تحمله(٦٧).

لقد اتخذ هلبرت اللغة الرياضية كموضوع مستقل وردها إلى عناصرها لكي يدرسها كلغة رياضية في حد ذاتها، وقد أطلق هلبرت على دراسة اللغة الرياضية في البداية مصطلح ما بعد الرياضيات **Meta mathematics** مما يدل ضمناً على إنها في مرتبة أدنى من كل الرياضيات، وقد احتاج هلبرت لهذا الغرض إلى لغة أكثر دقة، وهي لغة المنطق الرمزي والتي وجدها جاهزة في كتاب برنكيبيا ماتيماتيكا،وكان كل ما عليه أن يفعله هو تعديلها وتبسيطها وفقا لمتطلباته.(٦٨)

<u>ويمكننا فيما يلي تلخيص أهم أفكار المدرسة الصورية وهي(٦٩):-</u>

١. إن النسق البديهي هو السبيل الوحيد والمضمون لإرساء قواعد المنطق والرياضيات.

٢. لا يمكن اشتقاق الرياضيات من المنطق، ولكن لابد من تطويرهما معاً وفي نفس الوقت.

٣. إدخال مفاهيم جديدة واستخدامها تبرره دائماً براهين الاتساق.

لقد شكلت النزعة الصورية أهمية كبيرة في مفهوم المنطق، فمثلاً يرى البعض أنه حينما يهاجمنا الفلاسفة بالمفارقات التي تحت أيديهم فإننا نسارع بالاختباء خلف الصورية قائلين أن "الرياضيات" ما هي إلا مجموعة من الرموز التي ليس لها معنى.(٧٠)

وعلى الرغم من ذلك فقد وجهت العديد من الانتقادات إلى المذهب الصوري منها أن الاكسيوماتيك كما نراه عند هلبرت وتلاميذه يحتاج إلى قدر من المنطق قبل أن تستنبط منه

---

(67)Reuben Hersh, what is Mathematics, Really, P 160

(٦٨) ديمتريو، المرجع السابق، ج ٤، ص ص ٨١، ٨٢

(69)Louis O. Kattsoff, Aphilosophy of Mathematics, P 119

(70)Reuben Hersh, OP.Cit., P 140

قوانين المنطق لأن أحد شروط تأسيسه هو ألا تتناقض المسلمات فيما بينها، وعدم التناقض هذا من أهم قوانين المنطق، فالمنطق إذن مفروض مقدماً في كل محاولة اكسيوماتيكية من هذا النوع، لذلك يرى المنطقيون أن هذا المذهب مكمل للمذهب اللوجستيقى ومعمق له.(٧١)

ومن بين الاعتراضات أيضاً أن اختيار مسلمات معينة دون غيرها تظل مسألة غير محددة وربما ترجع إلى حدس رياضي بعيد أملى ذلك الاختيار دون غيره، في الوقت الذي تريد فيه الصورية البحتة لكي تبرر إسمها أن تستبعد احتمال دخول أي حدس في الفكر الرياضي والقضاء على مجرد إمكان ظهوره(٧٢).

موقف رسل من الإتجاه الصوري

يقول برتراند رسل عن المدرسة الصورية "ولهذه المدرسة ميزة كبرى هي أنها تتجنب كل جدل فلسفي، ولكن تعجز عن تفسير كيف يتم استخدام الأعداد في عملية العد"، فكل القوانين التي يأخذ بها الصوريون في معالجة الرياضيات يتحقق صدقها إذا اعتبرنا الصفر يعنى مائة أو ألفاً.(٧٣)

فقد رأى رسل أن هلبرت قد ترك الأعداد الصحيحة بغير تعريف مع التسليم في شأنها ببديهيات تجعل استنتاج القضايا العددية العادية ممكناً. بعبارة أخرى لا نعين أي معنى لهذه الرموز ٠، ١، ٢، ٣ ......فيما عدا أن لها بعض الخصائص المعدودة فى البديهيات، ويجب أذن اعتبار هذه الرموز على أنها متغيرات، ويمكن تعريف الأعداد الصحيحة الأخيرة حين يعطى الصفر. أما الصفر فيجب أن يكون مجرد شيء له الخصائص المعينة، وتبعاً لذلك لا تمثل الرموز ٠ ،١ ،٢، ... سلسلة واحدة، بل أي متوالية كانت، وقد غفل الصوريون عن أن الأعداد مطلوبة لا للحصول على الجمع فقط، بل للعد أيضاً، فهذه القضايا مثل: "وجد ١٢ حوارياً " أو " في لندن ٦,٠٠٠,٠٠٠ من السكان" لا يمكن تأويلها في

(٧١) د/ محمد ثابت الفندى، فلسفة الرياضة، ص ٧٨

(٧٢) نفس المرجع، ص ٧٨

(٧٣) برتراند رسل: فلسفتي كيف تطورت، ص ١٣٣

نظامهم لأن الرمز "٠" قد يؤخذ على أنه يعنى أي عدد صحيح متناه دون أن يترتب على ذلك أن تكون أي بديهية من بديهيات "هلبرت" كاذبة، وهكذا يصبح كل عدد رمزي مبهماً إلي ما لا نهاية له في الإبهام.(٧٤)

فنحن نحتاج للأعداد من أجل التحقق من صدق الصيغ الرياضية، وتطبيقها بشكل صحيح على الأشياء المعروفة، فنحن مثلا لدينا عشرة أصابع وعينان وأنف فالنسق الذي فيه (١) يمكن أن يعنى (١٠٠) ، (٢) يمكن أن تعنى (١٠١) وهكذا — إن هذا النسق يمكن أن يكون صحيحاً بالنسبة للرياضيات البحتة، لكنه لا يتناسب مع حياتنا اليومية.(٧٥)

وعلى هذا فإن الصوري هنا — فيما يرى رسل – يشبه صانع الساعات الذي ينغمس في جعل ساعته أنيقة لدرجة أنه يغفل عن الغرض الأساسي من صنع الساعات وهو الإخبار بالوقت ولا يضع فيها أي آلات.(٧٦)

وأيضاً توجد صعوبة أخرى في الموقف الصوري تتعلق بالوجود إذ يفترض "هلبرت" أنه إذا كانت سلسلة من البديهيات لا تؤدي إلى تناقض فلابد أن تكون هناك سلسلة من الموضوعات لا تؤدى إلى تناقض، وتبعاً لذلك راح يكرس جهده في المناهج التي تبرهن على الاتساق الذاتي لبديهياته، بدلاً من البحث عن إقامة نظريات تتعلق بالوجود بتقديم مثال من الأمثلة، فهو يعد الوجود تصوراً ميتافيزيقياً غير ضروري، ويجب أن يحل محله التصور الدقيق لعدم التناقض، وقد نسى هنا مرة أخرى أن للحساب استعمالاته العملية، وليس هناك حداً للأنساق القائمة على بديهيات عدم التناقض التي يمكن اختراعها، أما الأسباب التي تجعلنا نهتم بوجه خاص بالبديهيات التي يقود إليها الحساب العادي إنما

---

(٧٤) برتراند رسل: أصول الرياضيات، ص ٦

(75)Morris Weitz, Analysis and the unity of Russell's Philosophy, in the philosophy of Bertrand Russell, by Paul Arthur Schilpp, P 91

(٧٦) براتراند راسل: أصول الرياضيات، الجزء الأول، ص ٦

وأيضاً د/ محمد مهران، فلسفة برتراند رسل، ص ٢٠٢

تقع خارج الحساب، وتتعلق بتطبيق العدد على المواد التجريبية، وهذا التطبيق ليس جزءاً من المنطق أو الحساب، إلا أن النظرية التي تجعله مستحيلاً "بشكل أولي" لا يمكن أن تكون صحيحة، أما التعريف المنطقي للأعداد فيجعل ارتباطها بالعالم الفعلي للموضوعات المحدودة أمراً معقولاً، وهذا مالا تفعله النظرية الصورية.[٧٧] لكل هذه الأسباب يرى رسل أن نظرية الصوريين تهرباً غير مقنع.[٧٨]

---

(٧٧) د/ محمد مهران : فلسفة برتراند رسل، ص ص ٢٠٢، ٢٠٣

(٧٨) برتراند رسل: فلسفتي كيف تطورت، ص ١٣٣.

ثالثاً : الإتجاه الحدسي
Intuitionism

للاتجاه الحدسي تاريخ طويل في الرياضيات ، اعتنقه رياضيون معاصرون أمثال بروار **Brouwer** ، وفايل **Weyl** ، هيتنج **Heyting** (١٨٩٨-١٩٨٠) في ألمانيا ـ وجيل أقدم منهم من أمثال بوانكارية **Poincare** ، ولوبيج **Lebesge** ، وبير **Bair** في فرنسا.[٧٩]

وتعرف الحدسية بمقدرة الفرد على أداء سلسلة من الأفعال العقلية **mental acts** تبدأ من الفعل الأول ثم الثاني والثالث ... الخ ، فالسمة الأساسية للحدسية هي ما يمكن أن نسميه بالكفاية الذاتية **self sufficiency** أو التوليد الذاتي **self generation**[٨٠] ، فمثلاً مفهوم العدد يتولد عن طريق عملية العد[٨١]، وهذا ناتج عن نشاط عقلي له أصل في إدراك تحرك الزمن ـ هذا التحرك يكون قيد الاحتفاظ في الذاكرة.[٨٢] ويفهم الاتجاه الحدسي على أفضل صورة باعتباره تيار اتخذه بعض الرياضيين كرد فعل على الاتجاه المنطقي وأيضاً الاتجاه الصوري ، وكمحاولة لإنقاذ الرياضيات من التناقضات التي ظهرت فيها .[٨٣]

فأصحاب الاتجاه الحدسي يرون أن أصحاب الاتجاه المنطقي واقعون في خطأ الدور حين يدعون تطبيق النظريات المنطقية كوسيلة للبرهان في الرياضيات ، ذلك لأن النظريات كما

---

(٧٩) د/ محمد ثابت الفندى : فلسفة الرياضة، ص ١٥٩

(80) Raymond L Wilder, Introduction to the foundation of Mathematics , p 247

(81) Mario Bunge, Intuition and Science, Prentice hall New jersey,1962, P32

(82) Reuben Hersh, what is mathematics, really, p. 153

(83) Mario Bunge, OP.cit., P 32

يتضح في المنطق .. هي نفسها محتاجة في تكوينها إلى تكوين الرياضيات.[٨٤]

أما الصوريون فقد كانوا يجزمون بأن العناصر الرياضية الأولية (البديهيات) وأيضاً المنطقية ليست إلا علامات نضعها بأيدينا على الورق ، وهى بعيده تماماً عن كل معنى رياضي أو منطقي[٨٥] ، فقد عمل الصوريون على إيجاد فاصل بين فكر العالم وبين الرموز التي يتم استخدامها[٨٦] ، ومن ثم فإن الصيغ التي يمكن اشتقاقها من هده البديهيات لا نستطيع أن نفسر بها الاستخدامات العملية للرياضيات كما نستخدمها .[٨٧]

إن الفكرة الأساسية عند الاتجاه الحدسي هي أن الرياضيات قائمة على أساس الحدس، فهي لا تفترض كأساس لها أي علم آخر حتى ولو كان ذلك العلم هو المنطق .[٨٨]

فالرياضيات عند الحدسيين أولى وغير مقيدة بأي علم آخر ، وإذا كانت كذلك فلا يبقى لها غير الحدس والذي يقدم لنا التصورات والاستنباطات الرياضية كأمور أصلية ومباشرة وواضحة بذاتها ، فمثلاً الأعداد الطبيعية عند براور يقدمها لنا الحدس الأساسي للتحرك في الزمن ، وهذا الحدس هو نقطة البداية لكل الرياضيات ، حيث لابد أن نبني كل الرياضيات على الأعداد الطبيعية ، فالرياضيات التي لم تقم بشكل بنائي على أساس الأعداد الطبيعيه ليسن ذات معنى.[٨٩]

فالأعداد عند الحدسيين لا تقوم على أي نسق بديهي مثل نسق "بيانو"، فالأمر عندهم أنه إذا جعلنا $P(x)$ خاصية للأعداد الطبيعية بحيث أن $P(1)$ صحيحة و$P(n)$ تتضمن $P(n+1)$ وأن لدينا العدد المعلوم K والذي وصلنا إليه عن طريق التوليد ابتداءاً من (١)

---

(٨٤) د / محمد ثابت الفندى : فلسفة الرياضة ، ص ١٦١

(85)Mario Bunge, OP.cit., P 31

(86)Louis O . Kattsoff, a philosophy of mathematics, P.156

(87)Morris Weitz, op. cit., P 90

(٨٨) د / محمد ثابت الفندى : المرجع السابق ، ص ١٦٠ ، ١١٦

(89)Reuben Hersh, OP. Cit., P 154

مروراً بالأعداد إلى K ، فإن الخاصية (P) تظل موجودة في كل خطوة ومن ثم فهي تصدق مع K.[٩٠]

وهذه الأعداد لابد من اعتبارها بالكامل مجرد وحدات متميزة عن بعضها البعض فقط عن طريق مكانها في السلسلة الموجودة فيها هذه الأعداد. كما أن هذه الأعداد المرتبة في سلاسل لا يمكن أن يكون لها وجود بعيد عن الفكر فهي تمثل أحد أشكال الإدراك العقلي ومن ثم فهي غير قابلة للتغير حسب رغبتنا.[٩١]

من هنا نرى أن مفهوم الوحدة والترتيب شيئٌ أساسيٌ في بناء الأعداد الطبيعية عند الحدسيين.[٩٢]

إن المهم عند أصحاب الاتجاه الحدسي هو حدس الأعداد الطبيعية، ثم توسيع المناهج البنائية المستخدمة في التفكير لتأسيس كل فروع الرياضيات على أساس الأعداد، ومن ثم نستطيع الوصول إلى علم رياضي صحيح.[٩٣] فالعناصر الرياضية يجب أن يحددها الفكر البشرى حتى وإن كانت مستقلة عن أي فعل من أفعال الفكر، فالعنصر الرياضي يوجد طالما أن الفكر يضمن وجوده وأن خواصه هي الخواص التي يدركها الفكر.[٩٤]

فمثلاً إن إدراكنا لبياض ورقة من الأوراق، يرتبط لا محالة بفعل الإدراك، حيث أننا لا نستطيع تكوين إدراك للون الأحمر بدلاً من اللون الأبيض.[٩٥] فالأعداد الطبيعية يتم

(90)Raymond L. Wilder, OP.Cit., P 24

(91)Louis O. Kattsoff, OP. Cit., P 155

(92)Ibid, P 155

(93)John M Anderson &Henry W. Johnstone, Natural Deduction: The Logical Basis of Axiom Systems, Wads Worth pub. Co., Belmont California, 1962, 405

(94)Louios O. Kattsoff, OP. Cit., P 157

(95)Ibid, P 157

إدراكها على أنها إحدى أشكال نشاط العقل ، وهي ليست قابلة للتغيير حسب ما نريد [96] فالرياضيات تتكون من نشاط عقلي لبناء الأنساق الرياضية.[97] فمثلاً يرى "هيتنج" أن 2+2= 3+1 عبارة عن أبنية عقلية يشار إليها بأن 2+2 أو 1+3 تؤدى نفس النتيجة.[98]

وهذه العملية ليست قائمة على استخدام اللغة ، حيث يقول " بروار " لا تستطيع اللغة العادية أو أي لغة رمزية أخرى أن تلعب دوراً أكثر من دور المساعد غير الرياضي **non mathematical auxiliary** لكي يساعد الذاكرة الرياضية ، أو يمكن مختلف الأفراد من بناء نفس المجموعة[99].

فأي لغة عند الحدسيين ـ حتى اللغة الصورية ذاتها ليست إلا وسيلة اتصال وتخاطب، لذلك يصبح من المستحيل وضع نسق من الصيغ يكون له نفس قيمة الرياضيات الحدسية[100] حيث أن العناصر الرياضية عبارة عن أبنية عقلية أكثر من كونها كيانات من الأشياء[101] . لذلك " تنفصل الرياضيات بالكامل عن لغة الرياضيات ، ومن ثم عن ظواهر اللغة التي يضعها المنطق النظري"، وقد اعتبر بروار أن هذا القول بمثابة القانون الأول للاتجاه الحدسي[102].

---

(96)Ibid, P 157

(97)Raymond Klibansky, Philosophy in the Mid-century : a Survey, vol 2,Nuova Italia, Firenze, Italy,1958,p 103

(98)Raymond L. wilder, Op. Cit., PP247-248

(99)Iid, P 247

(100)I. M. Bochenski, A History of Formal Logic , P 293

(101) Penelop Maddy, Realism in Mathematics, Clarendon press, Oxford, 1992,p 23

(102) Ruben Hersh, op.cit., P 153

معنى ذلك أن الحدسيين يرون أن اللغة والمصطلح الرمزي إنما يعبران فقط عن وسيلة توصيل الأفكار الرياضية[١٠٣]، فإذا كانت اللغة شيئا ضروريا. إلا أن توصيل الأفكار الرياضية هي وظيفتها الوحيدة هنا[١٠٤]. فالكلمات التي نقولها أو الصيغ التي نكتبها تكون لها أهمية فقط طالما أنها تكون مدعومة بشكل أساسي عن طريق أحد أنشطة العقل غير اللغوية ، فصياغة أي مبرهنة تكون ذات معنى لو أنها أشارت إلي البناء العقلي لكيان رياضي ما.[١٠٥] كما أن هذه اللغة لا بد أن يكون لها خواص تجعلها مناسبة وصالحة لدخول وتغلغل المفاهيم الحدسية وتطبيقها في نطاق البحث.[١٠٦]

لذلك فقد رأى الحدسيون أن أصحاب الاتجاه الصوري قد خلطوا بين الرموز وبين ما تشير إليه، إذ يجب أن يكون هناك خطا فاصلا بين الرموز وبين ما تشير إليه، فإذا أراد الصوري أن يتناول اللغة الرياضية فإنه يكون حر في ذلك، لكن بشرط ألا يطلق على النتائج التي توصل إليها اسم " رياضيات".[١٠٧]

وعلى هذا يرى " هيتنج " أن عملية اشتقاق المبرهنات ـ بناء على قواعد عامة قائمة على أساس الحدس ـ يمكن تقديمها في شكل منطق رمزي ، والذي يطلق عليه أحيانا اسم المنطق الحدسي ، ويعد هذا المنطق مجالا فرعيا من الرياضيات ويكون استخدامه خارج نطاق الرياضيات أمرا لا معنى له.[١٠٨]

وإذا كانت عملية البرهنة عند الاتجاه الحدسي تعبر عن حقيقة أمبريقية ، فإنه تبعاً لذلك توجد فرضية أساسية أخرى يقول بها أصحاب الاتجاه الحدسي وهى أن القضية الرياضية

---

(103) Raymond L Wilder, Introduction to The Foundations of Mathematics p 248

(104) Ibid, p 248

(105) Proir A.N., Modern Logic: Frege to the present, in the Encyclopedia of philosophy, Vol. 3, P 557

(106) I M . Bochenski, op. Cit., p 294

(107) Louis O Kattsoff, op . cit ., P 156

(108) Raymond L-Wilder, op. Cit., P294

لا تصدق إلا إذا تم البرهنة عليها بنائيا .[١٠٩]

فعند الحدسيين يمكننا تفسير معنى قضية تأخذ الشكل (p v q) أي (q أو p) فقط عن طريق تقرير الشروط التي نحتاجها لتوضيح معنى هذه القضية أي ما نحتاجه لتقرير q أو ما نحتاجه لتقرير P .[١١٠]

والقضية (p Λ q) أي (p و q) يمكن تقريرها فقط إذا كان قد أمكننا تقرير كل من " P " و q.[١١١]

كما أن القضية عند الحدسيين ليست دالة صدق ، وقد أشار " هيتنج " إلى هذا بقوله " إذا كان لدينا قضية تقول أن " P" تتضمن " q" فإنه يمكن تقريرها إذا وفقط إذا كان لدينا بناء معين يرتبط ببناء آخر يبرهن على "p" ويؤدى تلقائيا إلى إحداث بناء يبرهن على "q".[١١٢]

فمن أهم مطالب البرهان البنائي عند الحدسيين عدم السماح بأي عبارة في الرياضيات ما لم يمكن إثباتها، ليس هذا فحسب، بل أيضا تقديم مثال عليها[١١٣]، وأي شخص يقصر في هذا الجانب فلا يلوم إلا نفسه إذا وقع في تناقضات.[١١٤]

وتبعا لهذا فإن أصحاب الاتجاه الحدسي يرون أنه من الناحية العملية فإن أي فرد يقبل البراهين البنائية فقط في الرياضيات فربما يتحتم عليه أن يرفض الحجج والبراهين التي

---

(109)Mathieu Marion, Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics, Clarendon press, Oxford,1998, p147

(110)Proir A.N., op.cit., p 557

(111)Stephan korner, the philosophy of Mathematics, an Introductory Essay , Butchinson university library, London, 1968, p 132

(112) Ibid, P 132

(113) W Kneal and M Kneal, The Development of logic , P675

(114) Ibid , P 675

يستخدمها قانون الثالث المرفوع.(١١٥)

فقد نشر برور عام ١٩٠٨ بحثاً يرفض فيه قانون الثالث المرفوع ، كما تحدث فيه أيضاً عن عدم الوثوق بمصداقية المبادئ المنطقية.(١١٦) لأن الرياضيات في نظره يجب ألا تفترض مسبقاً أي نسق منطقي، فهي مصدر المبادئ المنطقية وهذه المبادئ يمكن التعبير عنها فقط بعد أن يقرها الحدس السليم.(١١٧)

فقانون الثالث المرفوع في المنطق الكلاسيكي يحتل مكانه خاصة ، فالنتيجة المترتبة على هذا القانون هي أن كذب كذب P يستلزم P ، فإذا استطعنا أن نثبت أن افتراض كذب P يؤدى إلى تناقض إذن تكون P صادقة ، لأن أي قضية كاذبة تؤدى إلى تناقض، ومن ثم إذا كان كذب P كاذب فإن P تكون صادقة.(١١٨)

إن الاتجاه الحدسي هنا لا يقبل هذا البرهان ، لكنه يقبل القول بأن أي قضية تتضمن تناقضاً فلابد أن تكون كاذبة ، معنى ذلك أن الاتجاه الحدسي إذا كان يرفض قانون الثالث المرفوع فإنه يقبل قانون عدم التناقض لأنه واضح من الناحية الحدسية.(١١٩)

وقد ساق أصحاب الاتجاه الحدسي العديد من الأمثلة تبرر رفضهم قانون الثالث المرفوع، منها هذه القضية " هناك ثلاث سبعات متتابعة في التحديد العشري لـ "ط".(ط هنا هي القيمة التقريبية) ، وبقدر ما أمكننا استخراج قيمة "ط" فإنه ليس ثمة ثلاث سبعات متتابعة في تحديدها العشري ، لكن ليس هناك من سبب يبرر لنا أن نفترض أن هذه السبعات الثلاث المتتابعة لا يمكن أن ترد في نقطة تالية من التحديد العشري ـ فإذا ظهر

---

(115) Ibid, P 681

(116) Ibid , P 675

(117) Ibid , P 675

(118) Raymond L Wilder, op. Cit., P 256

(119) Ibid , P 257

فيما بعد أنه ثمة نقطة من التحديد العشري ترد فيها ثلاث سبعات متتابعة ، كان هذا حسماً للأمر ، لكننا إذا لم نصل إلى مثل هذه النقطة ، فليس هذا دليلاً على أن مثل هذه النقطة لا يمكن أن توجد بعد ذلك، وإذن فبالرغم من أننا قد نتمكن من أن نبرهن على أن " هناك " ثلاث سبعات متتابعة ، إلا أننا لا نستطيع مطلقاً أن نبرهن على أنه ليس هناك ثلاث سبعات متتابعة.(١٢٠)

وعلى هذا يرى الحدسيون أن قانون الثالث المرفوع إذا تم تطبيقه في الرياضيات ، سيكون بمثابة وباء لها ـ فالاعتقاد بهذا القانون مثل الاعتقاد الماضي والذي كان يقول أن السماء تدور حول الأرض، وعلى هذا يرى الحدسيون أنه يجب الاستعاضة عن كلمتي صادق وكاذب بكلمتي صادق بنائياً وكاذب بنائياً على الترتيب .(١٢١)

وإذا كانت القضية الرياضية عند الحدسيين تصدق إذا تم البرهنة على ذلك ، فإن افتراض وجود المجموعات اللانهائية عندهم سيشتمل على تناقض ، لأن مثل هذه المجموعات تكون غير قابلة للعد ومن ثم فلا يمكن التحقق من صدقها ، لهذا فإن هذه المجموعات تكون عند الحدسيين بلا معنى. (١٢٢)

فإذا كان التصور الكلاسيكي للصدق يقول بأن الأعداد يمكن التحقق من صدقها، نجد أن الاتجاه الحدسي يرفض هذا المبدأ ، فعلى أساس أن هناك عدد لا نهائي من الأعداد ، فلا يمكن التحقق من صدق كل الأعداد، وعلى هذا فقد اعتبر أصحاب الاتجاه الحدسي أن التصور الكلاسيكي لصدق الأعداد إنما هو تصوراً ميتافيزيقياً.(١٢٣)

---

(١٢٠) برتراند رسل : فلسفتي كيف تطورت ، ص ١٣٤

(121)Reuben Hersh, What is Mathematics, really, P 254

(122)Louis O Kattsoff, OP. Cit., P 158

(123)Ted Honderich, the Oxford Companion to Philosophy, Oxford university press, Oxford, 1995, P 35

وقد برر الحدسيون هذا الموقف بقولهم أن الناس العاديين في حياتهم اليومية يتعاملون مع المجموعات المنتهية، ويبين الحدس أن قواعد منطقهم العادي تكون صحيحة بشأن هذه المجموعات.[١٢٤]

وقد استطاع هيتينج عام ١٩٣٠ أن يقدم نسقاً منطقياً للتعبير عن المنطق الحدسي، حيث استخدم أربعة رموز " هي (Λ ، V، ¬، $\supset$) وتشير إلى (الربط " و") ، (الفصل " أو ") (السلب)، (اللزوم) على التوالي ، وهذه الرموز مستقلة عن بعضها البعض[١٢٥] ، فالأفكار الأولية في المنطق الحدسي لا يمكن التعبير عن الواحدة منها كدالة عن طريق الدوال الأخرى.[١٢٦] ، فمثلاً $a \supset b$ ليست هي $\neg avb$ كما هو موجود في نسق البرنكيبيا.[١٢٧](أي تعريف التضمن بواسطة السلب والفصل).[١٢٨]

وفى المنطق الحدسي إذا كان لدينا الصيغة :

$$\vdash a \supset b.\ \Lambda.\ b \supset c : \supset : a \supset c$$

فإن C,b,a تدل على قضايا.[١٢٩]

وقد استخدم هيتينج علامة التقرير المكررة (⊢⊢) للإشارة إلى تقرير البديهيات.[١٣٠]

وبخصوص القيم التي يمكن أن تأخذها القضايا a, b, c... فيرى هيتينج أن أي قضية ولتكن a يمكن أن تأخذ القيمة " صادق " والتي يرمز لها بالرمز 0(الصفر) ، القيمة "

(124) W kneal and M Kneal , op.cit., P 675

(125)Raymon L wilder, op. Cit., p 257

(١٢٦) ديمتريو : تاريخ المنطق ، الجزء الرابع ، ص ١٠٤

(127)Raymond L wilder, Introduction to the Foundation of Mathematics, p 257

(128)Principia, vo 1, P 94

(129)Raymond L wilder, op. Cit., p 258

(١٣٠) ديمتريو : المرجع السابق ، ص ١٠٥

كاذب " والتي يرمز لها بالرمز (1) كما أن هناك أيضاً حالة لا يمكن أن تكون فيها القضية كاذبة وإن كان صدقها غير مثبت ، ويرمز هيتينج لقيمة هذه القضية بالرمز(2) ولذلك فإنه من الواضح أن مبدأ الثالث المرفوع لا يعتبر كحالة خاصة للفصل المنطقي " a v b " إذ أننا في الواقع لو وضعنا a ¬ = b في الصيغة "إما a أو b" فإننا سنحصل عندئذ على الصيغة التالية :-

$$a \vee \neg a$$

إلا أن هذه القضية ليست صادقة، حيث أن القضية "إما a أو b" والتي تكون صادقة في حالة ما إذا كانت على الأقل إحدى قضاياها صادقة، وتصبح في هذه الحالة "a ¬ a v" تكون صادقة إذا كانت القضية a صادقة، إلا أن a يمكن أن يكون لها القيمة "2"على النحو التالي :-

$$2 \vee \neg 2$$

وفي هذه الحالة فإن القضية a ¬ a v لا تمثل قضية صادقة، نظراً لأنه لا يوجد يقين بأن أحد حدود الانفصال يكون صادقاً(١٣١).

ومن ثم فإن اشتقاق الصيغة التي تمثل قانون الثالث المرفوع ليست ممكنة في هذا النسق(١٣٢)، حيث أن "a ¬ v a" وهى حالة خاصة للانفصال لا تؤدى إلى تحصيل حاصل.(١٣٣)

أما الصيغة التي تقرر $\neg(a \wedge \neg a)$ وهى تشمل قانون التناقض فيمكن اشتقاقها في هذا النسق(١٣٤).ومعناها أنه من الكذب القول بوجود a وسالب a في نفس الوقت.

وقد استخدم هيتنج في نسقه عدداً من البديهيات نذكر منها ما يأتي(١٣٥) :-

---

(١٣١)نفس المرجع، ص ١٠٤

(132) Raymond L. Wilder, OP.Cit., P 258

(١٣٣) ديمتريو : المرجع السابق، ص ١٠٤

(134)Raymond L. Wilder, OP.Cit., P 258

$1- \vdash \vdash . a \supset a \wedge a$

وهذه البديهية تقرر أن القضية a يلزم عنها الضرب المنطقي للقضية a في نفسها.

$2- \vdash \vdash . a \wedge b \supset b \wedge a$

وهذه البديهية تقرر أن الضرب المنطقي للقضيتين a ، b يلزم عنه الضرب المنطقي للقضيتين b، a

$3- \vdash \vdash . a \supset b. \supset . a \wedge c \supset b \wedge c$

وهذه البديهية معناها أنه إذا كانت القضية a يلزم عنها القضية b فإن هذا يستلزم القول بأن الضرب المنطقي للقضيتين a ، c يلزم عنه الضرب المنطقي للقضيتين b ، C.

$4- \vdash \vdash . a \supset b. \wedge . b \supset c . \supset . a \supset c$

هذه البديهية تقرر أنه إذا كانت القضية a يلزم عنها القضية b والقضية b يلزم عنها القضية c فإن هذا يستلزم القول أن القضية a يلزم عنها القضية c.

$5- \vdash \vdash . a \vee b \supset b \vee a$

وتقرر هذه البديهية أن الفصل المنطقي بين القضيتين a ، b يلزم عنه الفصل المنطقي بين القضيتين b ، a ،بعبارة أخرى القضية المركبة التي تقرر "القضية a أو القضية b" يلزم عنها القضية المركبة التي "تقرر القضية b أو القضية a".

$6- \vdash \vdash . a \supset c . \wedge . b \supset c . \supset . a \vee b \supset c$

وهذه البديهية تقرر أنه إذا كانت القضية a يلزم عنها القضية c ،والقضية b يلزم عنها القضية c فإن هذا يستلزم القول أن القضية المركبة التي تقرر " a أو b" يلزم عنها القضية c.

(١٣٥) ديمتريو : المرجع السابق، ص ١٠٥

$7- \vdash \vdash . a \supset b . \Lambda . a \supset \neg b . \supset \neg a$

وهذه البديهية تقرر أنه إذا كانت القضية a يلزم عنها القضية b، والقضية a يلزم عنها كذب القضية b فإن هذا يستلزم القول بكذب القضية a.

وقد استطاع هينتج عن طريق تطبيق قواعد الاستنباط المقررة (الاستبدال وإثبات المقدم) أن يثبت إلى حد بعيد عدداً من المبرهنات في حسابه وهذه المبرهنات يمكن إدراج بعضها على النحو التالي(١٣٦). -

$1- \vdash . a \supset b . \supset . \neg b \supset \neg a$

ومعنى هذه المبرهنة أنه إذا كانت القضية a يلزم عنها القضية b فإن هذا يستلزم القول بأن كذب القضية b يلزم عنه كذب القضية a.

$2- \vdash . a \supset \neg b . \supset b . \supset \neg a$

ومعنى هذه المبرهنة أنه إذا كانت القضية a يلزم عنها كذب القضية b فإن هذا يستلزم القول بأن القضية b يستلزم عنها كذب القضية a.

$3- \vdash . a \supset b . \supset \neg \neg a . \supset \neg \neg b$

ومعنى هذه المبرهنة أنه إذا كانت القضية a يلزم عنها القضية b فإن هذا يستلزم القول بأن النفي المزدوج للقضية a يلزم عنه النفي المزدوج للقضية b .

$4- \vdash . a \Lambda b \supset c . \supset . a \Lambda \neg c \supset \neg b$

وهذه المبرهنة تقرر أنه إذا كان الضرب المنطقي للقضيتين a , b يلزم عنه القضية c فإن هذا يستلزم القول بأن الضرب المنطقي للقضيتين " a " ونفى القضية "c" يلزم عنه كذب القضية b.

---

(١٣٦) نفس المرجع، الجزء الرابع ، ص ١٠٦

$5- \vdash . a \vee \neg a \supset b . \supset . \neg\neg b$

وهذه المبرهنة تقرر أنه إذا كانت القضية المركبة التي تقرر "القضية a أو نفيها" يلزم عنها القضية **b** فإن هذا يلزم عنه النفي المزدوج للقضية **b**.

ونظراً للنزعة التجريبية التي اتخذها الحدسيون فقد اتخذ المنطق الحدسي شكلاً أكثر طبيعة على يد "كولموجوروف" **Kolmogoroff** (١٩٠٣–١٩٨٧) حيث استطاع أن يقدم تفسيراً لحساب المشاكل وذلك على غرار منطق هيتنج. فقد رأى كولموجوروف أنه لو تصورنا a ، b ، c على أنها ترمز لمشكلات بدلاً من القضايا فيمكن اعتبار هذا الحساب ذاته طريقة لحل المشكلات، وبذلك يكون لدينا "حساب الحل".

فمثلاً الصيغة **b** ⊃ **a** يمكن تأويلها على أنه إذا كان حل المشكلة **a** معلوم فأوجد حلاً للمشكلة **b**.

كما أنه يشير إلى حل المشكلة **a** و **b** بالصيغة $a \wedge b$ ، ويشير إلى حل إحداها على الأقل بالصيغة $a \vee b$ (١٣٧).

وكان يستخدم الرمز (⊢) كدلالة على المشكلة التي لابد من حلها وذلك بالنسبة لكل المتغيرات الموجودة فيها، فمثلاً الصيغة $\vdash a \supset a \wedge a$ تعنى أنه بالنسبة لكل **a** كيف يمكن الوصول لحل "$a \wedge a$" من حل **a** (١٣٨).

فالنسبة لحساب الحل بصفة عامة فقد اتضح أنه يتوافق رمزياً مع الحساب الحدسي للقضايا، فمثلاً لا نتوقع أن نجد الصيغة ($a \vee \neg a$) في حساب الحل طالما أن المنطق الحدسي لا يسمح بوجودها(١٣٩)، حيث أن افتراض الصحة الكلية لقانون الثالث المرفوع ستكون مكافئة لافتراض أن كل مشكلة لها حل، ونحن نجد أن أي صياغة رمزية لإحدى

(137) Raymond L. Wilder, Introduction to The Foundations of Mathematics, P 259

(138) Ibid, P 259

(139) Ibid, P 259

مبرهنات براور مثلاً تجزم بعدم تقديم أي مشكلة غير قابلة للحل بشكل قابل للبرهنة.(١٤٠)

مما سبق نرى أن الاتجاه الحدسي على خلاف الاتجاه المنطقي والاتجاه الصوري حيث قام الحدسيون بوضع خطاً فاصلاً بين الرياضيات والمنطق، فالرياضيات في نظرهم ليست مجموعة من الصيغ، بل هي نشاط عقلي نتائجه قابلة للنقل من خلال اللغة التي لابد من توافر عدة شروط بها لكي تكون صالحة لهذه الوظيفة.(١٤١)
كما أن الرياضيات عندهم لا تفترض المنطق مسبقاً، بل أن المنطق مأخوذ من الرياضيات، وبمجرد أن يتم ذلك، عندئذ يمكن إدخال الطابع الصوري عليه، وإن كان إدخال الطابع الصوري عليه ليس بالأهمية القصوى.(١٤٢)

وعلى الرغم من أن الاتجاه الحدسي قد لاقى قدراً كبيراً من التقدير فقد وجهت إليه العديد من الانتقادات، منها على سبيل المثال أنه إذا كانت الحدسية تسلم بأن الحدس لا يتغير، فقد تسائل علماء النفس والأنثروبولوجيا من الذي يحدد مسألة معرفة الشيء الحدسي؟ هل هو الطفل الرضيع أم الرجل العادي الذي لم يتأثر بالحضارة الرياضية؟.(١٤٣)

موقف رسل من الاتجاه الحدسي

لقد رفض رسل الاتجاه الحدسي حيث يرى أن المبدأ الأساسي الذي يستند إليه الحدسيون والذي ينص على أن الرياضيات مجموعة من الأبنية الحدسية التي يحكمها مبدأ التحقق من الصدق، – يرى رسل أن القول بهذا المبدأ والذي يؤدى إلى إنكار قانون

---

(140) Ibid, P P 259, 260

(141) I.M. Bochenski, A History of Formal Logic, P 293

(142) Ibid, P 293

(143) Mario Bunge, Intuition and Science, P 64

الثالث المرفوع – يؤدى إلى هدم البرهان القائل بأن هناك أعدادا حقيقية أكثر من الأعداد النسبية.(١٤٤)، ويترتب على ذلك أن أجزاء كبيرة من التحليل التي ظن لقرون كثيرة أنها تقوم على أساس وطيد قد أصبح مشكوكا فيها.(١٤٥)

لهذا فإن هذه الفرضية لو تم تطبيقها سوف تؤدى إلى نوع من الفوضى واللامعقولية(١٤٦). فمثلا القضية" أمطرت السماء ثلجا فى جزيرة مانهاتن فى ٢١ يناير من عام "١" الميلادي" فليس في وسعنا أن نتصور طريقة يمكننا بها أن نعرف ما إذا كانت هذه القضية صادقة أم كاذبة، ولكن من غير المعقول أن نذهب إلى أنها ليست صادقة ولا كاذبة.(١٤٧)

وأيضا يرى رسل أن مذهب الحدسيين المسمى بالنهائية **Finitism** يضع موضع الشك القضايا التي يدخل فيها مجموعات لانهائية على أساس أن تلك القضايا لا يمكن تحقيقها، ويجب إذا حملناه على محمل الجد أن يفضى إلى نتائج أكثر هدما مما يعترف به أنصاره، فالناس ولو أنهم يكونون فئة متناهية، فمن المستحيل من الناحية العملية والتجريبية عدهم، كما لو كان عددهم لانهائيا، ولو سلمنا بمبدأ أصحاب النهائية فلا ينبغي أن نقرر أي عبارة هامة مثل – "جميع الناس فانون" – تدور حول مجموعة تعرفها خصائصها، ولا يذكر بالفعل في تعريفها جميع أفرادها، وهذا قد يمسح بجرة قلم جميع العلوم وجميع الرياضيات.(١٤٨)

لكل هذه الأسباب يرى رسل أن نظرية الحدسيين يجب أن ترفض(١٤٩).

---

(١٤٤) برتراند رسل : أصول الرياضيات، الجزء الأول، ص ٧

(١٤٥) نفس المصدر ، الجزء الأول ، ص ٧

(146)Morris Weitz, Analysis and the unity of Russell's Philosophy, in the philosophy of Bertrand Russell, by Paul Arthur Schilpp, P 89

(١٤٧) برتراند رسل : فلسفتي كيف تطورت، ص ١٣٥

(١٤٨) برتراند رسل : أصول الرياضيات، الجزء الأول، ص ص ٧، ٨

(١٤٩) براتراند رسل: فلسفتي كيف تطورت ، ص١٣٥

تعقيب

إن الاتجاه المنطقي في تفسير أسس الرياضيات كان يرى أن كثيرا من البحث الرياضي يقع على محيط المنطق، فمثلا يرى رسل أننا إذا بحثنا في التصورات الداخلة في تعريف الأعداد الأصلية وجدنا أنفسنا نبحث في المنطق، فالخواص الابتدائية للأعداد تعنى بعلاقات واحد بواحد والتشابه بين الفئات.

كما أن التعريف المنطقي للأعداد – فيما يرى رسل – يجعل صلتها بالعالم الواقعي المكون من أشياء معدودة أمرا مفهوما.

لهذا فقد أنتقد رسل الاتجاهات الأخرى والتي كانت تبحث في أسس الرياضيات. فمثلا رأى رسل أن التأويل الصوري للرياضيات كما قدمه (هلبرت)، ترك الأعداد الصحيحة بدون تعريف، فالأعداد عند هلبرت ما هي إلا رموز ليس لها أي معنى فيما عدا بعض الخصائص المعدودة في البديهيات، لهذا فإن كل عدد رمزي عند هلبرت يكون مبهما إلى مالا نهاية له في الإبهام.

وأيضا فقد وجه رسل العديد من الانتقادات إلى الاتجاه الحدسي حيث رأى أن هذا الاتجاه في تفسير أسس الرياضيات أعظم خطرا.

فالشيء المهم عند أصحاب هذا الاتجاه هو حدس الأعداد الطبيعية، ثم التوسع في بناء كل فروع الرياضيات، وهذه الأبنية الحدسية يحكمها مبدأ التحقق من الصدق. لهذا فقد رأى رسل أن الاتجاه الحدسي ما هو إلا مظهر من مظاهر التجريبية السائدة والذي يضع موضع الشك القضايا التي يدخل فيها مجموعات لانهائية على أساس أن تلك القضايا لا يمكن التحقق من صدقها، ومن ثم فإن هذا الاتجاه لو حملناه على محمل الجد فإنه يفضى إلى نتائج أكثر هدما مما يعترف به أنصاره، لهذا فإن رسل قد رفض الاتجاه الحدسي.

الفصل الرابع

تطوير المناطقة المعاصرين واللاحقين لمنطق رسل

محتويات الفصل الرابع

تمهيــــد:

١- لود فيج فتجنشتين Ludwig Wittgenstein

أ) أسس الرياضيات

ب) الذرية المنطقية

٢- فرانك بلمبتون رامزي F. P. Ramsey

أ) نظرية الأنماط المنطقية.

ب) دالة القضية.

٣- كلارنس إيرفينج لويس C. I. Lewis

٤- ويلارد فان أورمان كواين W. V. O. Quine

٥- يان لوكاشيفيتش Jan Lukasiewicz

تعقيــــب

تمهيـــــد :

إن أبحاث برتراند رسل في المنطق بمثابة فاتحة عهد جديد للتطورات المنطقية اللاحقة، بحيث يمكن القول أن كتابات برتراند رسل في هذا المجال كانت بمثابة نقطة الانطلاق لمعظم الأبحاث اللاحقة في المنطق، فمثلاً نجد أن معظم الدراسات الحديثة في المنطق قد ركزت على دراسة نسق البرنكيبيا لما يحتويه من أفكار منطقية عميقة ومتطورة.

وعلى الرغم من كثرة الأبحاث المنطقية التي ظهرت بعد البرنكيبيا إلا أن معظمها جاء لتبسيط نسق البرنكيبيا، وكمحاولة لحل المشكلات الأساسية الموجودة فيه.

وسوف يقوم الباحث في هذا الفصل بدراسة تطوير منطق رسل عند كل من :-

١- فتنجشتين

٢- رامزي

٣- لويس

٤- كواين

٥- لوكاشيفيتش

١- لودفيج فتجنشتين (١٨٨٩-١٩٥١)

Ludwig Wittgenstein

يعتبر فتجنشتين من أهم فلاسفة التحليل، قدم إسهامات كبيرة في علم المنطق وفلسفة اللغة.

وقد كانت السنوات الست بين (١٩٠٦-١٩١٢) من أصعب الفترات في حياة فتجنشتين بالنسبة لاختياره للمهنة التي يريد أن يتجه إليها[١]، وخير ما يشهد بذلك عدم الاستقرار الذي كان يشعر به والتغير الذي حدث له أثناء هذه الفترة مثل رحيله من ألمانيا إلى إنجلترا ثم تجاربه في الملاحة الجوية، ثم بنائه محركاً نفاثاً، ثم اهتمامه بالرياضيات البحتة ثم أخيراً اهتمامه بفلسفة الرياضيات، فقد رُوى عنه أنه طلب نصيحة أصدقائه وأساتذته ليرشدوه إلى كيفية دراسة الجزء النظري من أسس الرياضيات فوجهوه إلى كتاب "أصول الرياضيات **principles of mathematics**" لبرتراند رسل والذي كان قد ظهر عام ١٩٠٣، ويبدو بوضوح الأثر الذي تركه هذا الكتاب في تطوير أفكار فتجنشتين[٢].

وفى عام (١٩١١) ذهب إلى يينا **Jena** في ألمانيا لكي يناقش أفكاره عن أسس الرياضيات مع "فريجه" الذي نصحه بالتوجه إلى كمبريدج للدراسة مع رسل، وقد نفذ فتجنشتين هذه النصيحة، حيث اهتم أثناء دراسته في كمبريدج بالفلسفة وأسس الرياضيات اهتماماً كبيراً، كما استفاد من النشاط الفكري الضخم الذي كان موجوداً في كمبريدج قبيل الحرب العالمية الأولى، إذ كان رسل في أوج تفكيره الفلسفي والمنطقي وأخرج هو وألفرد نورث

---

(١) عزمي إسلام: لودفيج فتجنشتين، سلسلة نوابغ الفكر الغربي، دار المعارف بمصر، بدون تاريخ نشر، ص١٤

(٢) نفس المرجع، ص ١٥

وايتهد كتابهما "مبادئ الرياضيات **Principia Mathematica**" والذي يعد أحد العلامات المميزة في تاريخ المنطق(٣).

وقد أصبحت العلاقة بين رسل وفتجنشتين فيما بعد ليست علاقة التلميذ بالأستاذ ولكنها علاقة صداقة وزمالة حميمة، وتبين الخطابات التي كانا يتبادلانها اهتمام كل منهما بالآخر من الناحية الشخصية والعلمية (فلسفية ومنطقية)(٤).

فنجد أن فتجنشتين في تفكيره الأولى – كما يبدو في رسالته المنطقية الفلسفية كان واقعاً إلى درجة كبيرة تحت تأثير برتراند رسل(٥)، حيث نجد أن العديد من الأفكار التي قال بها فتجنشتين كانت مألوفة في كتابات برتراند رسل(٦).

وفيما يلي سوف نناقش بعض الأفكار التي تأثر فتجنشتين فيها بآراء برتراند رسل وعمل على تطويرها.

أ- أسس الرياضيات

يعتبر كتاب فتجنشتين "ملاحظات على أسس الرياضيات **Remarks of the foundation of mathematics**" والذي نشر بعد وفاته – ذات أهمية فلسفية كبيرة في هذا المجال(٧).

(٣) نفس المرجع، ص ص ١٥، ١٦

(4) Elizabeth Eames Ramsden, Bertrand Russell's Dialogue with his Contemporaries, Southern Illinois university press ,Carbondale, Illinois, 1989, P 128.

(٥) د.عزمي إسلام، المرجع السابق، ص ٢٦

(6) A.C Grayling, Russell : A very Short introduction, Oxford university press, Oxford, England, 2002, P 126.

(7) Raymond Klibansky, Philosophy in the Mid-century, P 60.

فالرياضيات عند فتجنشتين عبارة عن منهج منطقي[٨]، فالقضية الرياضية عبارة عن تحصيل جاصل وهى بهذا شبيهة بالقضية المنطقية، إلا أنها تعبر عن تحصيل الحاصل في شكل مختلف عن التعبير الموجود في قضية المنطق – ولذا يقول فتجنشتين "إن الرياضيات إحدى طرق المنطق " – لأنها تضع لنا تحصيل الحاصل في شكل معادلة من المعادلات فقولنا ٢+٢ = ٤ معناه أننا قد اتفقنا على أن نستخدم رمزين هما (٢+٢) ، (٤) بمعنى واحد، وفى هذه الحالة لا يكون هناك فرق بين قولي عندي (٢،٢) من القروش وبين قولي عند ٤ قروش ... ويعبر فتجنشتين عن هذا بقوله "إن قضايا الرياضيات عبارة عن معادلات" وأيضاً بقوله "إن ما هو جوهري في المنهج الرياضي هو استخدامنا للمعادلات" والمعادلة الرياضية عبارة عن تفسير الصيغة التي تقع على يمين علامة التساوي مثلاً بصيغة أخرى ترادفها على يسار علامة التساوي – كما في المثال السابق – ومعنى ذلك أن القضية الرياضية تعبر عن إمكان استبدال أحد التعبيرين المرتبطين بعلامة التساوي – بتعبير آخر مساو له ويرادفه "فإذا كان هناك تعبيران يرتبطان بعلامة التساوي، فإن ذلك يعنى إمكان استبدال أحدهما بالآخر، ولذا فإن المنهج الذي تصل به الرياضيات إلى معادلاتها هو منهج الاستبدال" لأن المعادلات تعبر عن إمكان استبدال تعبيرين أحدهما بالآخر، ونحن ننتقل من عدد من المعادلات إلى معادلات جديدة بأن نضع تعبيرات محل تعبيرات أخرى وفقاً للمعادلات[٩].

---

(8) William H. Brenner, Wittgenstein: An Introduction, Translated by John F Holley & Joachim Schulte, State university of New York Press, New Jersey, 1992, P 87

(٩) د.عزمي إسلام: المرجع السابق، ص ص ٢٩٥ – ٢٩٦

وهذه المعادلات قضايا غير حقيقية **Pseudo-Proposition**[١٠]، فالقضية الرياضية بمثابة قاعدة أو معيار من أجل استخدام الكلمات التي تبين لنا ما يمكن أن نقوله بشكل منطقي (أي ما يعقل قوله)[١١]، فالمعادلة الرياضية تجمع تعبيرات، وتميز الموقف الذي ينبغي أن ننظر منه إليها[١٢]، فمثلاً الفرجار والمسطرة ليسا هما الأداتين المناسبتين لحل مسالة من مسائل الجمع، فنحن نعرف ما نبحث عنه في الرياضيات عندما نعرف فنيات وطريقة إيجاده[١٣].

كما أننا لا نحتاج للقضية الرياضية إلا لكي نقوم باستدلالات من قضايا لا تنتمي للرياضيات لكي نصل منها إلى قضايا لا تنتمي للرياضيات هي الأخرى[١٤]، فمثلاً نستخدم ٢+٢ = ٤ لنستنتج من القضية التي تقول "أنا معي قرشين في كل جيب من جيوبي الاثنين" أن معي أربعة قروش.

مما سبق نجد أن تأثير رسل على فتجنشتين واضحاً في هذا المجال، فقد ذهب رسل إلى القول بأن كثيراً من البحث الرياضي يقع على محيط المنطق، وأيضاً فإن رسل كان يرى أن المنطق الرياضي على الرغم من اعتباره أداة فلسفية ذات فائدة ، إلا أنه في حد ذاته لا يحمل معنى فلسفياً مباشراً[١٥].

---

(10) William H. Brenner, OP. Cit., P 87

(11) Alice Ambrose & Morris Lazerowitz, Essays in the unknown Wittgenstein ,Prometheus book, Buffalo, New York, 1984, P 172

(12) William H. Brenner, OP. Cit., P 87

(13) Ibid, P 89

(14) Ibid, P 87

(١٥) د.عزمي إسلام : لدفيج فتجنشتين، ص ٤٦

ب- الذرية المنطقية ورؤية العالم

لقد رأى رسل أن صورة القضايا الذرية والوقائع الذرية هي أبسط صورة من الصور المنطقية، إلا أن مثل هذه الصورة من القضايا والوقائع هي دائماً مركبة[١٦]، فماذا عسى أن تكون البسائط التي تنحل إليها هذه الوقائع والقضايا؟ إن الوقائع الذرية لا تنحل إلا إلى الأشياء التي تدخل في تركيبها، فتحليل الواقعة الذرية إلى أجزاء تحليل منطقي لا مادي، إذ الواقعة الذرية في الحقيقة وحدة لا تتجزأ ... حيث أن الذرة في علم الطبيعة يمكن تحليلها منطقياً إلى "الإلكترونات" و"البروتونات" مع استحالة فصل هذه الأجزاء في الطبيعة الواقعة، ومثل هذا يقال عن القضايا الذرية التي تناظر هذه الوقائع الذرية، فهي لا تنحل إلى قضايا أبسط منها بل إلى الألفاظ المركبة منها وحسب[١٧]. والألفاظ التي تعبر عن الجزئيات في القضايا هي من الناحية النظرية أسماء الأعلام[١٨].

إن هذه الآراء لرسل قد أثرت في تفكير فتجنشتين إلى حد كبير، فعند فتجنشتين نجد أن فكرة التحليل جعلته يسلم بوجود مستوى من القضايا الابتدائية (الذرية)، حيث لابد أن يأتي التحليل إلى نقطة نهاية[١٩]، حيث يحلل فتجنشتين القضايا إلى أبسط وحدة ذات معنى، أو أبسط وحدة لغوية يمكن أن نحكم عليها بالصدق أو الكذب – وهى القضية الأولية – ولذا فكل القضايا إنما تعتمد على هذه القضايا الأولية لأنها تتكون منها، وعلى ذلك فهي كما يعبر فتجنشتين "عبارة عن دالات صدق في القضايا الأولية" بمعنى أن صدقها أو كذبها يتوقف على صدق أو كذب القضايا الأولية[٢٠].

---

(١٦) د. محمد مهران : فلسفة برتراند رسل، ص ٢٥١

(١٧) نفس المرجع، ص ٢٥١

(١٨) نفس المرجع، ص ٢٥٢

(19) Mathieu Marion, Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics, P 113.

(٢٠) د. عزمي إسلام، المرجع السابق، ص ٢٤٦

ويرى فتجنشتين أن القضية الأولية على الرغم من أنها آخر ما نصل إليه من تحليلنا للغة، باعتبارها الوحدة اللغوية الأولى – إلا أنها مع ذلك ليست بسيطة بساطة كاملة – لأنها تتكون بالفعل من أجزاء – لكن هذه الأجزاء ليست قضايا إنما هي أسماء[٢١]، وعلى هذا فإن الأسماء هي أبسط مكونات تتكون منها القضايا.

ويسمى فتجنشتين هذه الأسماء بالعلامات البسيطة أو العلامات الأولية حيث لا يكون لها معنى إلا في سياق الجمل أو العبارات ذات المعنى – كما أن الاسم لا يعتمد ولا يقوم على معنى مكوناته الهجائية حتى وإن كانت هذه المكونات في سياقات أخرى لها معنى مستقل مثل كلمة **Battle** في اللغة الإنجليزية (أي معركة) حيث أن فيها جزء هجائي وهو **Bat** والذي يعنى خفاش[٢٢].

وقد عبر فتجنشتين عن هذا بقوله "أما الاسم فلا يمكن تحليله إلى أكثر من كونه اسماً بذكر أي تعريف له، لأنه علامة أولية"[٢٣].

هذا بالنسبة للذرية المنطقية عند فتجنشتين ومدى تأثره ببرتراند رسل فيها. أما بالنسبة لفكرته عن العالم فنجد أن العديد من آرائه في هذا المجال كانت مألوفة في كتابات برتراند رسل.

فمثلاً نجد أن نظرية الأوصاف لرسل قد حلت مشكلة كبيرة عن طريق الكشف عن شكل القضية، حيث استخدم رسل التحليل ليبين أنه ليست كل القضايا تأخذ شكل "الموضوع – المحمول" حيث قد تتضمن القضايا على علاقات، والفهم الكامل لمثل هذه العلاقات يتم عن طريق إجراء تحليل صحيح للقضايا ولا يتم ذلك إلا بتصنيف أشكال الوقائع[٢٤].

ويقول رسل "إن الإحساس القوى بالواقع أمر ضروري للغاية لإجراء تحليل صحيح للقضايا"[٢٥].

---

(٢١) نفس المرجع، ص ٢١٩

(22) www.metacrowler.com, Stanford Encyclopedia of Philosophy, Letter W, Wittgenstein.

(٢٣) د. عزمي إسلام: المرجع السابق، ص ٢٦١

(24) A.C Grayling, Russell: A Very Short Introduction, P 125

(٢٥) د. محمد مهران، فلسفة برتراند رسل، ص ٢٨٢

يستخدم رسل هنا لفظ "الواقع" بمعنى قريب من "الوقائع" أو بمعنى أدق "مجموع الوقائع" حيث يقول "حينما أتحدث عن الواقع ... فأنا أعنى كل شيء لابد من ذكره في وصف كامل للعالم" ولما كان العالم يحتوى على وقائع فإن مجموع الوقائع قد يشكل ما يعنيه رسل بالواقع[٢٦].

وهذا هو ما حدث في كتاب فتجنشتين "رسالة منطقية فلسفية" حيث يقول[٢٧]:-

١ - العالم هو جميع ما هنالك.

١,١ - العالم هو مجموع الوقائع لا الأشياء.

١,١١- العالم حدوده الوقائع، وإن هذه الوقائع هي جميع ما هنالك منها.

١,١٢- ذلك أن مجموع الوقائع يحدد ما هنالك كما يحدد كذلك ما ليس هنالك.

١,١٣- والوقائع في المكان المنطقي هي العالم.

١,٢ - فالعالم ينحل إلى وقائع.

فعند فتجنشتين نجد أن "العالم" هو وقائع وليس مجموعة "أشياء" وأيضا فقد رأى رسل أن العالم يتضمن وقائع والتي تكون هي ما هي بغض النظر عن الطريقة التي نفكر بها فيها[٢٨].

فقد كان فتجنشتين في الوقت الذي كتب فيه رسالته يعتقد أن العالم يتكون من بسائط ذات خواص وعلاقات شتى، والخواص البسيطة التي تتصف بها البسائط، والعلاقات البسيطة التي تكون بينها هي وقائع ذرية، والجمل التي تحكى عنها هي قضايا ذرية[٢٩].

---

(٢٦) نفس المرجع، ص ٢٨٢

(٢٧) لودفيج فتجنشتين : رسالة منطقية فلسفية، ترجمة د. عزمي إسلام، مراجعة د.زكى نجيب محمود، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة ١٩٦٨، ص٦٣

(28)Raymond Bradley, The Nature of All Beings, A Study of Wittgenstein's Modal Atomism, Oxford university press, Cambridge, 1992, P 6

(٢٩) برتراند رسل: فلسفتي كيف تطورت، ص ١٤٤

إن هذا الوصف لبناء العالم يتوازى عند فتجنشتين مع وصف بناء الفكر كما تعبر عنه القضايا — وقد أطلق فتجنشتين على هذه العلاقة لفظ **Picturing** (رسم الصورة) حيث يقول في الرسالة(٣٠) :-

٤- إن الصورة المنطقية للحقائق هي فكرة .

٣,١ — في القضية يجيء الفكر معبراً عنه في صورة يمكن إدراكها بالحواس

٣,٢ -- ويمكن التعبير عن الأفكار في القضايا على نحو يتماثل فيه أي عنصر من عناصر علامة القضية مع عناصر التفكير.

٤.٢١ — فالقضية رسم للوجود الخارجي، لأنني أعرف حالة الوقائع (الأمور) التي جاءت لتمثلها.

هكذا نجد أن هذه الأفكار المنطقية التي ترتكز عليها هذه الفرضيات، كانت معروفة في كتابات رسل الأولى حيث ترتبط أساساً بفكرة البناء وطريقة التحليل كما أوضحت نظرية الأوصاف عن طريق الأمثلة(٣١).

ويمكننا تلخيص أهم معتقدات فتجنشتين والتي يتضح أنها معتقدات ذرية تتوافق مع معتقدات رسل في هذا المجال فيما يلي(٣٢) :-

١- كل قضية لها تحليل نهائي يكشف أنها دالة صدق للقضايا الابتدائية التي تقرر وجود الوقائع الذرية .

٢- القضايا الابتدائية مستقلة عن بعضها البعض وكل واحدة منها تصدق وتكذب بشكل مستقل عن صدق وكذب القضايا الابتدائية الأخرى.

٣- إن القضايا الابتدائية هي تجمعات لرموز بسيطة دلالياً هي أسماء **Names**.

---

(30) A.C. Grayling, Russell: A Very Short Introduction, P 126

(31) Ibid, P 126

(32) www.metacrawler.com, Stanford encyclopedia philosophy, OP. Cit.,

٤- إن الوقائع الذرية تتوافق مع هذه القضايا الذرية.

إن هذه المعتقدات على الرغم من أن فتجنشتين قد تأثر فيها بالذرية المنطقية عند رسل إلا أنه قد طور هذه النظرية على نحو يختلف عن تطويرها عند رسل حتى ليقال "إن الذرية المنطقية عند فتجنشتين أكثر ذرية منها عند رسل" ويؤيد ذلك معنى "الاعتقاد" عند رسل الذي تأثر فيه برأي فتجنشتين القائم على أساس من النظرية الذرية المنطقية — فرسل كان يذهب إلى أن معنى الاعتقاد في صحة قضية من القضايا أو عبارة من عبارات اللغة، لا يرتبط فقط بالواقعة التي تتحدث عنها تلك العبارة، بل يرتبط كذلك باتجاه الاعتقاد، سواء كان ذلك الاتجاه إلى الواقعة أو بعيداً عنها، ويمثل لذلك بقضية مثل "اليوم هو يوم الثلاثاء" فمثل هذه القضية يمكننا أن نعتقد أن لها معنى سواء كان اليوم يوم الثلاثاء أم لم يكن ...، ويمكننا أن نقول — مجازاً — حينما يكون اليوم هو يوم الثلاثاء — أن اعتقادك بأن اليوم هو يوم الثلاثاء، يكون متجهاً اتجاه الواقعة، أما حينما لا يكون اليوم هو يوم الثلاثاء، يكون اعتقادك متجهاً بعيداً عن الواقعة، وعلى ذلك فالدلالة الموضوعية للاعتقاد لا تتحدد بالواقعة فقط، بل باتجاه الاعتقاد - وواضح من المثال السابق أن فكرة الاعتقاد مرتبطة بفكرة تحليل العالم إلى وقائع وتحليل اللغة إلي قضايا ويستطرد رسل بعد ذلك المثال معلقاً بقوله "إنني مدين بهذه النظرة إلي صديقي لود فيج فتجنشتين"[٣٣].

(٣٣)د/ عزمي إسلام ،لودفيج فتجنشتين، ص ص٣٤٨،٣٤٩.

٢-فرانك بلمبتون رامزي(١٩٠٣-١٩٣٠)

F. P. Ramsey

ولد في كمبريدج ودرس الرياضيات في كلية ترينتى **Trinity** وتخرج فيها بامتياز، وكان ذكاؤه ملحوظاً لدرجة أنه أثر في العديد من أساتذة الجامعات في كمبريدج، قرأ كتاب فتجنشتين "رسالة منطقية فلسفية" وتأثر به كثيراً حيث ذهب في عام ١٩٢٣ إلى النمسا لكي يناقشه مع فتجنشتين والذي كان يعمل مدرساً في قرية صغيرة في ذلك الوقت، وعندما بلغ رامزي من العمر ٢١ عاماً كان عمله في مجالي المنطق والرياضيات عملاً غزيراً[٣٤].

وعلى الرغم من أنه كان يكتب كتلميذ من تلامذة فتجنشتين، ومن أنه يتبعه في كل شئ ما عدا تصوفه، فإن الطريقة التي يتناول بها المشكلات مختلفة عن طريقة فتجنشتين ، ذلك أن فتجنشتين ينطق بالأمثال ويترك للقارئ أن يسبر أغوارها بقدر ما يستطيع، وإذا أخذت بعض أمثاله بحرفيتها، فإنها لا تكاد تتفق مع وجود المنطق الرمزي، أما رامزى فهو على العكس من ذلك حريص – حتى وهو يتأثر بخطى فتجنشتين أكبر التأثير – على أن يثبت كيف أياً ما كان المبدأ الذي يعالجه، فمن الممكن أن يطوع ليدخل في بناء المنطق الرمزي[٣٥].

لقدساير رامزى فريجه ووايتهد ورسل في القول بأن الرياضيات جزء من المنطق، وبهذا اعتبر نفسه بأنه ينتمي إلى ما يسمى بالمدرسة المنطقية في مقابل المدرستين الصورية والحدسية – ولهذا السبب أخذ رامزي كتاب "برنكيبا ماتيماتيكا" كأساس للمناقشة والتعديل[٣٦].

---

(34) www.wikipedia.org , Ramsey

(٣٥) برتراند رسل : فلسفتي كيف تطورت، ص ١٥٤

(٣٦) ديمتريو: تاريخ المنطق، الجزء الرابع، ص ١٧

أ- نظرية الأنماط:

بعد نشر كتاب البرنكيبيا - أشار رامزى إلى وجود تقسيم هام بين المفارقات[٣٧]، حيث يقول "إن المفارقات (المسائل المتناقضة) أمرٌ لم يلق القدر الكافي من الاهتمام والتعليق في البرنكيبيا ،فهذه المفارقات تنحصر في مجموعتين أساسيتين، هما المجموعة "A" والمجموعة "B" فالمجموعة "A" تتألف من المفارقات التي توجد في النسق المنطقي أو الرياضي حيث تشمل على مصطلحات منطقية أو رياضية مثل "فئة ، عدد" والتي تبين أنه لابد وأن يوجد شئ ما خطأ في المنطق أو الرياضيات".

أما المفارقات الموجودة في المجموعة "B" فهي ليست مفارقات منطقية، حيث لا يمكن تحديدها بالحدود أو المصطلحات المنطقية البحتة، فهي تحتوى على حدود ومصطلحات ذات صلة ما بالفكر واللغة أو الرمزية ومن ثم فهذه المفارقات لا يمكن أن تكون ناشئة عن خلل أو عيب فى النسق المنطقي أو الرياضي، لكنها ناشئة عن الأفكار والتصورات الخاطئة المرتبطة بالفكر واللغة[٣٨].

وعلى ذلك يمكن تقسيم المفارقات الأكثر شهرة كما يلي[٣٩] :-

المجموعة "A" وتشمل على المفارقات الآتية :-

١- فئة كل الفئات التي ليست عنصراً في ذاتها.

---

(37)Harold Newton Lee, Symbolic Logic, P 30

(38) F.P Ramsey, The Foundation of Mathematics and other Logical Essays, P20

(39) Ibid, P 20

٢- العلاقة بين علاقتين عندما تكون الواحدة منهما لا تتضمن ذاتها بالنسبة للأخرى.

٣- مفارقة بولارى فورتى **Bulari forti** (في أكبر عدد ترتيبي).

المجموعة "B" وتشمل على المفارقات الآتية :-

١- أنا أكذب **I am Lying**.

٢- أقل عدد صحيح لا يمكن تسميته بأقل من تسعين (٩٠) مقطع هجائي.

٣- أقل عدد ترتيبي غير معرف.

٤- مفارقة ريتشارد.

٥- مفارقة فايل عن المتخالفات المنطقية **Weyl's Contradiction about "heterologisch"**

إن ميزة هذا التقسيم عند رامزي تكمن فيما يلي :-

١- إن تناقضات المجموعة الأولى "A" يمكن أن تحل باستخدام نظرية الأنماط البسيطة[٤٠]، والتي تبعا لها أن ما يُقال صدقا أو كذبا عن موضوعات من نمط معين لا يمكن أن يقال بشكل له مغزى عن موضوعات من نمط مختلف، حيث أن الخلط بين الأنماط يؤدى إلى التناقضات، لأننا في المنطق نتحدث فقط عن الفئات ذات الأعضاء المعروفة لنا فقط والمحددة بدقة، وعلى هذا فإن الحل يكون بوضع ترتيب هرمي نبدأ فيه بالفئات التي تتألف من جزيئات وتكون هذه هي النمط الأول — وتكون هذه هي النمط الثاني وهكذا.

---

(٤٠) ديمتريو : المرجع السابق، جـ ٤، ص ٧٨

وبذلك نكون قد أوجدنا استراتيجية لحل المفارقات المنطقية أو الرياضية(٤١).

٢- إن نقائض المجموعة الثانية "B" التي يمكن اجتنابها باستخدام نظرية الأنماط المتشعبة (أي التقسيم الفرعي الداخلي للأنماط بحيث لا توجد إشارة إلى كل الخواص) لا تظهر في أي نسق منطقي أو رياضي، لذلك فإن نظرية الأنماط المتشعبة وبديهية الاختزال (الرد) تصبحان بلا جدوى(٤٢).

ب- دالة القضية

لقد استطاع رامزي أن يقدم تصوراً جديداً لدالة القضية استطاع من خلاله أن يستغنى عن بديهية الاختزال التي تطلبتها نظرية الأنماط المتشعبة.

فقد نظر رسل ووايتهد إلى دالة القضية على أنها صيغة لفظية تحتوى على متغير لم يحدد بعد، وأنها تصبح جملة عادية متى حددنا قيمة للمتغير، فدالة القضية "س هو إنسان" مثلاً تصبح جملة عادية متى استبدلنا بـ (س) اسم علم، فقيم الدالة تكون هي الجزئيات المتعينة من بين مجموعة القيم التي تندرج تحت متغير ما(٤٣).

وهذا ينطبق على الفئات التي يبدو أنها تعرف بعد أفرادها، فمثلاً الفئة المكونة من ثلاثة أفراد هم "أ" و "ب" و "جـ" تعرف بدالة القضية س=أ ، أو س=ب، أو س=جـ(٤٤).

أما رامزي فقد رأى أن مشكلات "البربنكيبيا" إنما نشأت لتدخل غير مشروع لوجهة نظر مفهومية ... فقد رأى أنه ليس ثمة اعتراض "منطقي" على تعريف فئة لامتناهية بعد أفرادها، فنحن لا نستطيع أن نعرف فئة لامتناهية بهذه الطريقة لأننا فانون، لكن فناءنا

---

(41) A.C Grayling, Russell, A Very Short Introduction, P 41

(٤٢) ديمتريو : المرجع السابق، جـ ٤، ص ٧٨

(٤٣) برتراند رسل: فلسفتي كيف تطورت، ص ١٥١

(٤٤) نفس المصدر ، ص ١٥٠

واقعة تجريبية ينبغي على المناطقة أن يتجاهلونها[٤٥].

لذلك فقد رأى أن تعريف برنكيبيا لدالة القضية يحتوى على خطأ، ويفترض بسبب هذا الخطأ أنه لا يمكننا أن ندرس الشيء بصفة مستقلة (بمفرده) أي بمعزل عن غيره من الأشياء، وبهذا لا يمكن أن يكون لنا به صلة على الإطلاق[٤٦].

لهذا فقد تصور رامزي الدالة على نحو مخالف تماماً، فقد كان ينظر إليها على أنها لا تعدو أن تكون وسيلة لربط القضايا بقيم المتغيرات، حيث يقول "إننا نعرف الفكرة الجديدة لدالة قضية منظور إليها من جهة الماصدقات ... فمثل هذه الدالة ذات الفرد الواحد تنشأ نتيجة لأي علاقة واحد بكثير منظور إليها من جهة الماصدقات تقوم بين القضايا والأفراد، معنى هذا أن أى ارتباط سواء كان ممكناً أو غير ممكن – يشد إلى كل فرد قضية واحدة، مع كون الفرد برهاناً للدالة والقضية قيمة لها"،وبهذا استطاع رامزي باستعماله هذا التفسير الجديد لفكرة دالة القضية أن يستغنى عن بديهية الاختزال (الرد)، وأن يعرف كذلك القضية س=ص تعريفاً لا يفترق رمزياً عن التعريف الموجود في البرنكيبيا وإن كان قد أصبح لها على يده تفسيراً جديداً، وبهذه الطريقة ينجح في ان يحافظ على الجوانب الرمزية من "برنكيبيا ماتيماتيكا" دون تغيير تقريباً[٤٧].

---

(٤٥) نفس المصدر ، ص ص ١٥٠، ١٥١

(46)F. P Ramsey, OP. Cit., P 22

(٤٧) برتراند رسل: المصدر السابق، ص ص ١٥١، ١٥٢

٣- كلارنس إيرفينج لويس (١٨٨٣-١٩٦٤)

C.I. Lewis

تلقى لويس تعليمه في جامعة هارفارد حيث دَرَسَ المنطق، ثم قام بالتدريس في نفس الجامعة من عام ١٩٢٠ حتى تقاعده عام ١٩٥٣. من أهم مؤلفاته في مجال المنطق كتابه المسمى "دراسة شاملة للمنطق الرمزي".

وقد قام بتأليف هذا الكتاب عام ١٩١٨، وأيضاً كتاب "المنطق الرمزي" والذي ألفه عام ١٩٣٢ بالاشتراك مع لانجفورد[48]، وقد دافع لويس في هذا الكتاب عن أنواع المنطق المعزولة عن العالم المادي وهى ضروب المنطق الرمزي الجديد والتي عرفت كأنساق مجردة تماماً من المضمون المادي ومعزولة عزلاً كاملاً عن عالم الواقع[49]، لهذا فقد تحدث عن نظرية اللزوم الدقيق والذي يدعو إلى إقامة الاستدلال الصوري على علاقة ثابتة بغير احتكام إلى أى صدق أو كذب من العالم الخارجي وهذا يعنى أن المنطق عندئذ بدأ يأخذ طريقه إلى ثلاثة أمور وهى:-

١- استبعاد كل ما هو استقراء.

٢- فرض اللزوم الصوري الخالص وهو اللزوم الدقيق.

٣- تعميق الصورية بالمعنى الفلسفي الأرسطى القديم[50].

لهذا فقد بدأ "لويس" أبحاثه المنطقية بنقد فكرة اللزوم عند برتراند رسل فالسمة الأساسية للزوم عند رسل هي أن ما تستلزمه القضية الصادقة فهو أيضاً صادق، فمثلاً إذا كانت "أ" تستلزم "a" عندئذ لا يمكن أن تكون "p" صادقة و "q" كاذبة[51].

---

(48) www.Wikipedia.org, C.I Lewis

(٤٩) أليس أمبروز، موريس لازيروفيتش: أوليات المنطق الرمزي، ص ٨

(٥٠) نفس المرجع، ص ص ٧،٨

وأيضاً يرى رسل أنه إذا كانت "p" كاذبة، و "q" صادقة فإن القضيـة الـتي تقـول أن "p" تستلزم "q" لابد وأن تكون صادقة، ومن ثـم القضيـة الـتي تقـول أن "p " تسـتلزم "q".

يمكن تعريفها عن طريق النفي بقولنا "إما أن تكون "p " كاذبة أو "q" صادقة"[٥٢].

لقد أوضح "لويس" الفرق بين الاستدلال واللزوم عند رسل باسـتخدام قـاعدة رسـل الخاصـة القائلة "أن القضية الكاذبة تستلزم أى شـئ، وأن القضيـة الصادقـة مسـتلزمة مـن أى شـئ" حيث يرى (أي لويس) أنه يترتب مثلاً على القضية القائلة أن القضية الكاذبـة تسـتلزم أى شئ أن نقول بالمثل "أن القمر مصنوع من الجبن الأخضر" يلزم عنها "٢+٢=٤"، الأمر الذي سيترتب عليه أنه سوف يوجد في نسق اللزوم المادي (عند رسل) فئة مـن القضايـا لا يمكـن تطبيقها على أى استدلال صحيح، كما يمكننا استناداً إلى القضية القائلة "إن الفئة الفارغـة متضمنة في أى فئة" أن نقـول بـالمثل "إذا لم تكـن كـل شـياطين البحـر موجـودة" فـإن "كـل شياطين البحر حيوانات لافقارية" حيث أن هذه القضية تلزم بالضرورة، وفى هـذه الحالـة تكون فئة شياطين البحر فئة فارغة، بينما الحيوانات اللافقارية فئة موجودة، وطبقاً لهذا فإنها تتضمن فئة فارغـة وهـى فئـة شـياطين البحـر، إذن فكيـف وصلنـا إلى هـذه النتـائج الاعتباطية والشاذة ؟

لقد إنتهى "لويس" إلى أن النتائج التي تنتج لدينا في هـذه الحـالات إنمـا ترجـع إلى علاقـة اللزوم عند "رسل" علاقة ماصدقية ولا تشـير إلى العلاقـة المنـاظرة للمفـهوم، بينمـا يعتمـد الاسـتدلال علـى معنـى القضايـا، وهـذا هـو السـبب في أن العلاقـة لابـد وأن تكـون علاقـة مفهوم[٥٣].

---

(51)Principia, vo 1, P 94

(52)Ibid, P 94

(٥٣) ديمتريو: تاريخ المنطق، جـ ٤ ، ص ١٣٢

لذلك فإنه على ضوء هذا يظهر اللزوم عند رسل – بالنسبة للويس على أنه لزوم مادي، لأن أي استدلال حقيقي عند رسل يمكن أن يتأسس فقط في ظل الشروط المادية المعطاة، وإلا أصبح لا معنى له على الإطلاق، وبالتالي يكون محتملاً.

لذلك فقد حاول لويس تقديم معنى دقيق للزوم، وذلك بتعريفه على النحو التالي :- "إنه من المستحيل أن تكون "**p** " صادقة، "**q**" كاذبة" فهذا التعريف في رأى لويس يقدم علاقة مفهومية بين القضيتين **p** ، **q** على نحو ما يرتبطان معاً بتصور الضرورة **necessity** وهذا هو ما يسميه لويس باللزوم الدقيق(٥٤).

فعلاقة اللزوم الدقيق عند لويس تعبر بشكل دقيق عن العلاقة التي تصح وتصدق عندما يكون الاستنباط الصحيح ممكناً، وعلى هذا فإن نسق اللزوم الدقيق يمكن أن يقال عنه "أنه هو النسق الذي يقدم لنا معياراً للاستدلال الاستنباطي – وهذا هو غاية البحث المنطقي"(٥٥).

وقد استخدم لويس بعض الرموز لتمييز فكرة اللزوم الدقيق عنده عن فكرة اللزوم عند رسل وهذه الرموز هي(٥٦):-

(~) ويدل على المستحيل.

(–) ويدل على النفي.

($\multimap$) ويدل على اللزوم الدقيق.

ووفقاً لهذه الرموز فإنه يمكن تعريف اللزوم الدقيق بالتعريف الآتي:-

$$P \;\multimap\; q. = . \sim (p. - q) \qquad DF$$

ويعنى "أنه من المستحيل أن تكون "**p** " صادقة و "**q**" كاذبة".

---

(٥٤) نفس المرجع، جـ ٤، ص ١٣٣

(55) Ruth Barcan Marcus, Modalities, Philosophical Essays, Oxford university press, Oxford 1993, P 196.

(٥٦) ديمتريو : المرجع السابق، جـ ٤، ص ص ١٣٣، ١٣٤

وقد احتوى نسق اللزوم الدقيق عند لويس على سبع مصادرات وهى[٥٧]:-

11.1 pq. —∋ . qp

وهذه المصادرة معناها أن حاصل الضرب المنطقي للقضيتين p و q يلـزم عنـه لزومـاً دقيقـاً حاصل الضرب المنطقي للقضيتين q و p.

11.2 pq . —∋ . p

وتعنى أن حاصل الضرب المنطقي للقضيتين "p " و "q" تلزم عنه لزوماً دقيقاً القضية "p ".

11.3 P. —∋ . p p

ومعناها أن القضية "p " يلزم عنها لزوماً دقيقاً حاصل الضرب المنطقي للقضية" "p في نفسها.

11.4 (p q) r. —∋. p (q r)

وهذه المصادرة تقرر أن حاصل الضرب المنطقي للقضية المركبة (q p) مـع القضيـة "r" يلزم عنه لزوماً دقيقاً حاصل الضرب المنطقي للقضية "p" مع القضية المركبة (r q).

11.5 p. —∋ . ~ (- p).

وتعنى أنه من المستحيل أن نفى القضية "p" يلزم عنها لزوماً دقيقاً.

11.6 p —∋ q . q —∋ r: —∋ . p —∋r

---

(٥٧) نفس المرجع ، جـ ٤، ص ١٣٦

وهذه المصادرة تقرر أنه إذا كانت القضية "p" يلزم عنها لزوماً دقيقاً القضية "q" والقضية "q" يلزم عنها لزوماً دقيقاً القضية "r" فإن هذا يستلزم لزوماً دقيقاً القول بأن القضية "p" يلزم عنها لزوماً دقيقاً القضية "r".

11.7 pp ⥽ q: ⥽. q

وهذه المصادرة معناها أنه إذا كان حاصل الضرب المنطقي للقضية "p" فى نفسها يلزم عنه لزوماً دقيقاً القضية "q" فإن هذا يلزم عنه لزوماً دقيقاً القول بالقضية "q".

وبهذه الطريقة فإن كل المصادرات والتعريفات في نسق البرنكيبيا يمكن البرهنة عليها في نسق اللزوم الدقيق عند لويس.

٤- ويلارد فان أورمان كواين

W.V. Quine

ولد عام (١٩٠٨)، كان من أعظم علماء المنطق والفلاسفة الأمريكيين في القرن العشرين، درس المنطق في جامعة هارفارد[٥٨].

أعجب كواين بكتاب برنكيبيا ماتيماتيكا بمجلداته الثلاثة حيث رأى أن هذا الكتاب يحتوى تحليل رائع واختزال للأفكار الرياضية الأساسية إلى أفكار منطقية أساسية قليلة وواضحة[٥٩].

لذلك توجهت معظم أبحاث كواين ناحية استخراج أفضل شئ من النسق المنطقي في البرنكيبيا، ثم عمل على تقديم أنساق بديلة لنسق البرنكيبيا[٦٠].

ويمكن اعتبار كتاب كواين "المنطق الرياضي" هو ذروة جهوده في هذا المجال ، فقد اقترب في هذا الكتاب من المنهج المستخدم في البرنكيبيا، حيث وضع نسقاً كاملاً للمنطق وذلك بتقديمه تعريفات وبراهين كاملة، وعلى الرغم من أن التطورات المنطقية المتضمنة في هذا الكتاب تختلف عن تلك الموجودة في نسق البرنكيبيا إلا أنها تقوم على ما هو متبع في نسق البرنكيبيا[٦١]، إلا أن كواين في نسقه تخلى عن نظرية الأنماط المنطقية عند رسل ووضع بدلاً منها نظرية المطابقة **Theory of Stratification** ، وهذه النظرية تعتمد على تقديم ترقيم للمتغيرات، بحيث يسمى التعبير مترابطاً إذا كانت المتغيرات

---

(58) www.Wikipedia.org, W.V.O Quine

(59)Juliet Floyd, Future pasts, the Analytic Tradition in Twentieth – Century philosophy, Oxford university press, Oxford, 2003, P 217

(60) Joseph S. Ullian, Quine and the Field of Mathematical Logic, in the philosophy of W.V. Quine, by Paul Arthur Schilpp, open court, LaSalle, Illinois, 1986, P 571

(61) Ibid, P 571

التي يتألف منها تشتمل على أعداد مترابطة منطقياً[٦٢] ،وبذلك استطاع محو العديد من التناقضات وأيضاً التخلص من عملية التكرارات التي أوجدتها نظرية الأنماط عند برتراندرسل[٦٣].

وعلى الرغم من أن النسق الذي قدمه كواين على غرار النسق الذي وضعه رسل ووايتهد في كتاب برنكيبيا ماتيماتيكا إلا أن كواين حاول أن يجعل نسقه أكثر وضوحاً وبساطة[٦٤].

فمثلاً يرى كواين أن علامة السلب المستخدمة في برنكيبيا ماتيماتيكا وهي العلامة (~) لا تصلح للتطبيق إذا كانت لدينا متغيرات كثيرة في الدالة وأردنا تطبيق السلب عليها لذلك فهو يفضل العلامة (–) والتي استخدمها تشارلز بيرس في رمزيته فمثلا إذا كان لدينا المتغير " P" وأردنا أن نعبر عن سلبه فإن الصورة الجديدة لسلب هذا المتغير هي ($\bar{P}$) وإذا أردنا أن نعبر عن سلب السلب لنفس المتغير فإن ذلك يكون على الصورة ($\bar{\bar{P}}$)، فهذا هو سلب السلب الذي يكافئ المتغير " P" منطقيا وأيضا يرى كواين أنه إذا كان لدينا المتغيرات (r، q، p) فإنه يمكننا أن نعبر عن صدقها جميعاً في دالة وصل واحدة وذلك حين نضع هذه المتغيرات وضعاً متجاوراً بحيث تكون على صورة (p q r)، ويستنتج كواين قانون صدق هذه الدالة حيث يرى أنها تصدق إذا وفقط إذا صدقت جميع القضايا الموجودة فيها، وتكذب إذا وفقط إذا كانت قضية واحدة من هذه القضايا على الأقل كاذبة، ويرى كواين أن الوصل بين القضية ونفسها يكافئ القضية ذاتها أي يمكننا اختصار الصيغة (p p) إلى الصيغة (P)[٦٥].

---

(٦٢) ديمتريو: المرجع السابق، ص ١١٧

(63) Joseph S. Ullian, OP. Cit., P 571

(64) Raymond Klibansky, Philosophy in the Mid-century, vo 1, P 167

(65) W.V.O Quine, Methods of Logic, A Holt-dryden book, Newyork, 1959, P 14

وبالنسبة لاستخدام علامة التقرير قبل المتغيرات الرمزية في البرنكيبيا فإنها عند كواين تكون مفيدة، حيث أن وجود هذه العلامة يكفى لإظهار أن أي متغيرات حرة موجودة في تعبير ما لابد أن نفهمها على أنها مقيدة بأسوار كلية موضوعة في بداية التعبير ككل، بحيث يمكن اعتبار هذه العلامة اختصار للعبارة القائلة "إن التعبير الآتي عندما توضع أسوار كلية لربط وتقييد المتغيرات الحرة فيه فإن هذا التعبير يكون مبرهنة"[٦٦].

لقد كانت إبداعات كواين كبيرة بحيث ساهمت في إرساء قواعد المنطق الرياضي، فقد قدم العديد من المعايير للعمل في هذا المجال بحيث يمكن القول أن كواين من أكثر الفلاسفة تأثيراً بعد رسل، فى مجال المنطق حيث قدم نظريات هامة وأعاد صياغة نظريات أخرى قديمة لكن بقدر أكبر من التعميم الموجود في نسق البرنكيبيا[٦٧].

---

(66) W Kneal & M Kneal, The Development of Logic, P 517

(67) Joseph S. Ullian, OP, Cit., P 571

٥- يان لوكاشيفيتش (١٨٧٨-١٩٥٦)

Jan Lucasiwicz

ركزت معظم أعمال لوكاشيفيتش على المنطق الرياضي، اشتهر بالمنطق المتعدد القيم Many Valued logic.

فقد كان المنطق الكلاسيكي، مثلما كان منطق برتراندرسل، ينسب للقضايا قيمتين وهما — الصدق أو الكذب (T أو F)، نظراً لأن أي قضية طبقاً لقانون الثالث المرفوع والذي يعد المبدأ الأساسي لهذا المنطق إما أن تكون صادقة أو كاذبة، إلا أن هناك قضايا معينة مثل القضية التي تقول "من الممكن أن أكون في وارسو في اليوم الثلاثين من شهر مايو" فهذه القضية ليست ضرورية ولا صادقة أو كاذبة في الوقت الذي تم فيه تقديرها، لذلك يقدم لوكاشيفيتش قيمة ثالثة لمثل هذه القضايا وهى قيمة "ممكن" حيث أن بعض المناطقة رمزوا في الماضي للكذب بالرمز (0)، وللصدق بالرمز (1) فإن لوكاشيفيتش يرمز للممكن بالرمز ($\frac{1}{2}$)[٦٨]. وبالتالي ينشأ لدينا نسق منطقي ثلاثي القيم (0 , $\frac{1}{2}$, 1)، وأيضاً يمكن تعميم هذه الفكرة عن طريق إدخال سلسلة من القيم فى المسافة الفاصلة بين (0) الكاذب، (1) الصادق وبالتالي يمكننا التعامل مع أنساق يبلغ عدد قيمها ٤،٥،٦ ... إلخ وتسمى هذه الأنساق تبعاً لقيم الصدق، أي بالمنطق الرباعي القيم، المنطق الخماسي القيم ... إلخ[٦٩].

وفى عام ١٩٢٩ قدم لوكاشيفيتش طريقة رمزية جديدة اتبعها فى مؤلفاته فقد استغنى في هذه الطريقة عن الأقواس التي استعاض عنها بيانو Peano بالنقط وتابعه في ذلك رسل وايتهد، وهذه ميزة منطقية هامة لطريقة لوكاشيفيتش، بالإضافة إلى يسرها من الناحية

---

(٦٨) ديمتريو: تاريخ المنطق، جـ٤، ص ١٦٠

(٦٩) نفس المرجع ، جـ ٤، ص ١٦٦

العملية، لأنها لا تستخدم غير حروف الهجاء التي يسهل طبعها وكتابتها[٧٠].

فإذا كانت الصيغ المنطقية (والرياضية) بوجه عام تحتوى على نوعين من الرموز هما المتغيرات، الثوابت التي تربط بين هذه المتغيرات، فإن لوكاشيفيتش يدل على المتغيرات بحروف صغير (a, b,.... p, q,....)، ويدل على الثوابت بحروف كبيرة (A,E,......., C, N)[٧١].

فمثلاً استخدم لوكاشيفيتش الرمز (N) للإشارة إلى السلب، والرمز (A) للإشارة إلى الفصل، والرمز (K) للإشارة إلى الوصل، والرمز (C) للإشارة إلى التضمن، والرمز (E) للإشارة إلى التكافؤ، والرمز (D) للإشارة إلى عدم الاتساق. وفيما يلى سوف نقارن في جدول بين العمليات الرمزية عند رسل وما يناظرها عند لوكاشيفيتش[٧٢].

العملية الرمزية	برتراندرسل	لوكاشيفيتش
السلب	~ p	N p
الفصل	p V q	A p q
الوصل	p . q	K p q
التضمن	p ⊃ q	C p q
التكافؤ	p ≡ q	E p q
عدم الاتساق	P / q	D p q

(٧٠) يان لوكاشيفيتش: نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق الصوري الحديث، ترجمة وتقديم د. عبد الحميد صبرة، دار المعارف، الإسكندرية، ١٩٦١، مقدمة المترجم، ص ٣٤

(٧١) نفس المرجع، مقدمة المترجم، ص ٣٤

(72) Otto Bird, A Precise of mathematical Logic, D. Reide publishing Company, Dordrecht, Holland, 1959. P 14

وقد استطاع لوكاشيفيتش تبعاً لهذه الطريقة أن يعيد صياغة العمليات الرمزية الموجـودة في نسق ائبرنكيبيا كما يلي [٧٣]:- (سوف نذكر الصيغـة الرمزيـة كمـا هـي موجـودة في نسـق البرنكيبيا ثم نتبعها بصياغتها الجديدة لوكاشيفيتش).

أولاً : القوانين التي تتساوى فيها المتغيرات في الشكل

١- قانون الهوية : **Principle of Identity**

$$P \equiv P$$
Epp

٢- قانون النفي المزدوج: **Principle of Double Negation**

$$\sim\sim P \equiv P$$
ENNpp

٣- قانون النفى الثلاثى: **Principle of Triple Negation**

$$\sim\sim\sim P \equiv \sim P$$
ENNNpNp

٤- قانون اختزال السلب: **Reduction of Negation**

$$\sim P \equiv P/P$$
ENpDpp

٥- القانون الأول لتحصيل الحاصل: **1st Law of Tautology**

$$P \vee P. \equiv .P$$
EAppp

٦- القانون الثانى لتحصيل الحاصل: **2nd Law of Tautology**

$$P.P \equiv P$$
EKppp

---

(73) Ibid, pp 19-20

ثانياً : قوانين حاصل الجمع

١- القانون التوزيعى لحاصل الجمع : **Commutative Law of the Sum**

$$p \vee q . \equiv . q \vee p$$

EApqAqp

٢- قانون الترابط لحاصل الجمع : **Associative Law of the Sum**

$$p . \vee . q \vee r : \equiv : p \vee q . \vee r$$

EApAqrAApqr

٣- القانون الأول لتبسيط حاصل الجمع : **1st Law of simplification of the sum**

$$p . \vee . p \vee q : \equiv : p \vee q$$

EApApqApq

٤- القانون الثانى لتبسيط حاصل الجمع : **2nd Law of simplification of the sum**

$$p . \vee . pq : \equiv : p$$

EApKpqp

٥- القانون الأول لدي مورجان: **De Morgan's 1st Law**

$$\sim . p \vee q . \equiv . \sim p . \sim q$$

ENApqKNpNq

٦- صيغ أخرى لقوانين الجمع:

1- $p \vee q \equiv . \sim p \supset q$
EApqCNpq

2- $p \vee q \equiv \sim p / \sim q$
EApqCNDpq

3- $p \vee q : \equiv p \supset q \supset q$
EApqCCpqq

ثالثا : قوانين التضمن

1. $. p \supset q. \equiv . \sim p \vee q$
   ECpqANpq

2. $. p \supset q. \equiv . p / \sim q$
   ECppDpNq

ويسمى هذا القانون باختزال التضمن : **Reduction of Implication**

3. $. p \supset q : \equiv : q. \equiv . p \vee q$
   ECpqEqApq

4. $. p \supset q. \equiv \sim q \supset \sim p$
   ECpqCNqNp

ويسمى بالقانون الأول لتبادل المواضع: **1st Law of Simple Contraposition**

5. $. p \supset \sim q . \equiv . q \supset \sim p$
   ECNpqCqNp

ويسمى بالقانون الثاني لتبادل المواضع: **2nd Law of Simple Contraposition**

6. $\sim p \supset q . \equiv . \sim q \supset p$
   ECNpqCNqp

ويسمى بالقانون الثالث لتبادل المواضع: **3rd Law of Simple Contraposition**

7. $P . \supset . q \supset r : \equiv : q . \supset . p \supset r$
   ECpCqrCqCpr

ويسمى بقانون التبادل البسيط : **Law of simple commutation**

مما سبق نرى أنه على الرغم من بساطة صياغة القوانين فى نسق البرنكيبيا إلا أن هذا لم يمنع لوكاشيفيتش من بناء نسق منطقى يعتمد على أفكار أبسط من المعروضة فى البرنكيبيا، وذلك من خلال رمزية جديدة تعالج البراهين المنطقية والرياضية بصورة أوضح وأبسط فى نفس الوقت.

تعقيب

إن أبحاث برتراندرسل فى مجال المنطق كان لها تأثير قوى على التطورات المنطقية اللاحقة، فمثلاً نجد أن نسق البرنكيبيا الذى وضعه رسل بالاشتراك مع زميله وايتهد كان بمثابة نقطة الانطلاق لمعظم الأبحاث اللاحقة فى المنطق حيث كانت تحاول تبسيطه وتطويره.

فمثلاً نجد أن فتجنشتين على الرغم من تأثره بالذرية المنطقية عند رسل إلا أنه عمل على تطويرها وتفسيرها على نحو يختلف عنه عند رسل.
وأيضاً نجد أن رامزي قام بتقسيم المفارقات إلى نوعين، النوع الأول منها هى مفارقات تشتمل على أفكار منطقية أو رياضية، أما النوع الثانى فهى مفارقات تتعلق باستخدام اللغة أو التفكير أو الرمزية، وقد رأى رامزي أن النوع الأول يمكن تجنبه باستخدام نظرية الأنماط البسيطة، أما النوع الثاني فيتم تجنبه باستخدام نظرية الأنماط المتشعبة، لذلك رأى رامزي أن نظرية الأنماط المتشعبة وبديهية الاختزال تصبحان بلا جدوى في المنطق.

أما لويس فقد بدأ أبحاثه المنطقية من خلال نقده فكرة اللزوم المادي عند رسل، فقد رأى لويس أنه في نسق اللزوم عند رسل سوف تنتج مجموعة من القضايا لا يمكن تطبيقها على أي استدلال بشكل صحيح، لأن علاقة اللزوم عند رسل علاقة ماصدقية، ومن ثم فأى استدلال عنده يمكن أن يتأسس فقط فى ظل الشروط المادية المعطاة وإلا أصبح بلا معنى، وبالتالي يكون محتملاً، لهذا فقد رأى لويس أن اللزوم يجب أن يشير إلى علاقة مفهومية، بمعنى آخر يجب أن يعتمد اللزوم على معنى القضايا، وهذا هو ما يسميه لويس باللزوم الدقيق.

أما كواين فقد استطاع أن يقيم نسقاً منطقياً على نحو ما هو متبع في نسق البرنكيبيا لكنه تخلى في نسقه هذا عن نظرية الأنماط المنطقية عند رسل، ووضع بدلاً منها نظرية المطابقة والتي استطاع من خلالها أن يتخلص من التكرارات التي أوجدتها نظرية الأنماط.
أما لوكاشيفيتش فقد استطاع أن يعبر عن صيغ ومبرهنات البرنكيبيا عن طريق رمزية جديدة، حيث استخدم حروف الهجاء والتي يسهل كتابتها وطبعها.

مما سبق نجد أنه على الرغم من تعدد أنساق ما بعد البرنكيبيا إلا أن هذه الأنساق قد استمدت قوتها من نسق البرنكيبيا.

كشف بأهم الرموز المستخدمة فى الرسالة

الرمز	معناه
$\top$	اللزوم عند فريجه
$\supset$	اللزوم عند بيانو وأصحاب البرنكيبيا وهيتنج
$\rightarrow$	اللزوم عند هلبرت
⥽	اللزوم الدقيق عند لويس
$\sim$	السلب عند بيانو وأصحاب البرنكيبيا
$\neg$	السلب عند هيتنج
$\in$	عضوية الفرد فى فئة عند أصحاب البرنكيبيا

الخاتمة

ويمكن إجمال أهم النتائج التي توصل إليها الباحث فيما يلي:-

١- لقد كان لرياضيات القرن التاسع عشر أثر كبير على حركة تطور المنطق، حيث تبين أن النقائض التي ظهرت في الرياضيات هي نقائض ذات طبيعية منطقية وليست رياضية لذلك ظهرت الحاجة إلى ضرورة إعادة بناء جديد إلى المنطق.

٢- استطاع رسل أن يقيم المنطق نسقاً استنباطياً حيث تناول كل نظرية من نظريات المنطق على حده ووضعها في نسق استنباطي وذلك بالكشف الصريح عن قائمة لا معرفاتها وتعريفاتها ومصادراتها ، ثم البرهنة بعد ذلك على القضايا المشتقة واستنباط القضايا التحليلية وذلك على نحو لم نعهده عند السابقين عليه .

٣- استطاع برتراند رسل عن طريق ابتكاره لنظرية الأوصاف أن يتخلص من لغز وجود الأشياء الخيالية ، فوجود مثل هذه الأشياء يؤدي إلى كسر قانون عدم التناقض، فقد رأى رسل أن كثير من القضايا التي كنا ننظر إليها على أنها تأخذ شكل (الموضوع _ المحمول) أتضح أنها ليست كذلك ، حيث لا بد أن نفهمها على أنها عبارات وجودية ، وعند تحليل مثل هذه القضايا يجب أن تختفي العبارات غير الحقيقية .

٤- إن النقطة الرئيسية التي ترتكز عليها نظرية رسل في الأوصاف هي معرفة الفرق بين أسماء الأعلام والأوصاف فاسم العلم يمكن أن يفهم منعزلاً عن بقية الكلمات الأخرى فهو يحدد شخصاً بمفرده ويكون هذا الاسم له دون غيره ، أما العبارات الوصفية فهي تسهم في معنى الجملة دون أن يكون لها معنى بمفردها - فهي تكتسب معناها في سياق الجملة التي ترد

فيها ، وعلى هذا فإنه عند تحليل القضايا يجب أن يظهر اسم العلم في التحليل أما الوصف فيختفي.

٥- استطاع رسل من خلال نظريته في الأنماط المنطقية أن يتخلص من التناقضات التي ظهرت في المنطق ، فقد رأى رسل أن مثل هذه التناقضات تنشأ نتيجة الاستخدام المتحرر لعبارات تتضمن كلمات مثل (كل القضايا ، كل الدول) لذلك فقد رأى رسل أن نضع مثل هذه العبارات موضع تحكم صارم، بحيث تكون الأعضاء الممكنة لفئة ما لها من نمط موحد، حيث يجب أن نتحدث في المنطق عن الفئات ذات الأعضاء المعروفة لنا فقط ، لذلك فإن ما يقال عن موضوعات من نمط معين لا يمكن أن يقال بشكل له مغزى عن موضوعات من نمط معين آخر، وقد وجد رسل أن الحل هنا يكون بوضع ترتيب هرمي منطقي محدد للفئات بحيث نبدأ بالفئات التي تتألف كليةً من جزئيات ، وتكون هذه هي النمط الأول – ثم نسير إلى الفئات التي يكون أعضاؤها فئات من النمط الأول وتكون هذه هي النمط الثاني – ثم نسير إلى الفئات التي يكون أعضاؤها فئات من النمط الثاني وتكون هذه هي النمط الثالث وهكذا، بحيث تكون أعضاء كل فئة من نمط معين محدد ومعروف لنا بدقة.

٦- أوجد رسل شكلاً آخر لنظرية الأنماط اكثر تعقيداً وهو " نظرية الأنماط المتشعبة" حيث رأى رسل أنه لا بد من تقسيم خواص كل نمط إلى طبقات بحيث لا يوجد في الطبقة الأولى تعريف يتضمن كل الخواص والطبقة الثانية من الخواص تتضمن فئات من خواص الطبقة الأولى – وهكذا بحيث لا توجد إشارة مطلقاً إلى كل الخواص .

٧- عندما وجهت إنتقاضات إلى نظرية الأنماط المتشعبة على أساس أنها تتطلب عدداً غير منتهي من التكرارات عند كل مستوى - أدخل رسل بديهية الاختزال (الرد) للتغلب على مثل هذه المشكلة ، والتي وفقاً لها (أي بديهية الاختزال) تكون أي مبرهنة أياً كان نمطها تكون متكافئة صورياً مع نمطها الأصلي والذي أمكن البرهنة عليه عند أدنى مستويات النمط المسموح به، على الرغم من الانتقادات التي وجهت إلى بديهية الاختزال من حيث أنها غير واضحة حدسياً فقد برر رسل وجودها بأنه لا يجد غيرها كمخرج من مشكلة التكرارات التي أوجدتها نظرية الأنماط المتشعبة.

٨- بعد إقامة رسل المنطق نسقاً استنباطياً وتخلص من العيوب والنقائض التي ظهرت فيه عمد إلى اشتقاق قضايا الرياضيات من قضايا المنطق - حيث حاول تفسير المفاهيم الأساسية في الرياضيات بما يقابلها من المفاهيم المنطقية ، ونظراً لأن كل المفاهيم الرياضية يمكن اختزالها إلى الأعداد الطبيعية - فقد قام رسل بإشتقاق الأعداد الطبيعية من المفاهيم المنطقية.

٩- رفض رسل موقف الاتجاه الصورى من ترك الأعداد الصحيحة دون التعريف - فقد رأى رسل أن هذا الموقف من جانب الصوريين قد يكون صحيحاً بالنسبة للرياضيات البحتة ، لكنه لا يتناسب مع حياتنا اليومية ، حيث أننا نحتاج إلى الأعداد من أجل التحقق من صدق الصيغ الرياضية ، وأيضاً لتطبيقها على الأشياء المعروفة ، لذلك فإن رسل يرى أن التعريف المنطقى للأعداد يجعل إرتباطها بالعالم أمراً معقولاً .

١٠- رفض رسل الاتجاه الحدسي ، والذي كان يرى أن الرياضيات عبارة عن مجموعة من الأبنية الحدسية يحكمها مبدأ التحقق من الصدق - فقد رأى رسل أن التسليم بهذا الرأى والذى

يؤدى إلى رفض قانون الثالث المرفوع – ينتج عنه نوع من الفوضى واللامعقولية – لأن هذا الموقف سيجعل أجزاء كبيرة من التحليل مشكوكاً فيها وقد ظن لقرون طويلة أنها تقوم على أساس وطيد.

١١- رفض رسل المذهب المسمى بالنهائية عند الاتجاه الحدسى – حيث رأى أن القول بهذا المذهب سوف يضع موضوع الشك جميع القضايا التى يدخل فيها مجموعات لا نهائية – فتبعاً لهذا المذهب لا يمكننا مثلاً أن نقرر عبارة مثل " كل الناس فانون " وهذا قد يمسح بجرة قلم جميع الرياضيات والعلوم.

١٢- لقد كان لرسل تأثيراً كبيراً على العديد من الرياضيين والمناطقة بحيث يمكن القول أن معظم أفكارهم كانت مألوفة فى كتابات برتراند رسل .

١٣- لقد احتلت دراسة نسق البرنكيبيا مكان الصدارة فى الدراسات المنطقية الحديثة وذلك لما يوجد به من دقة ومهارة فى صياغة الأفكار المنطقية وتقديمها فى أقوى صورة ممكنة.

١٤- على الرغم من أن أنساق ما بعد البرنكيبيا مثلت اتجاهات جديدة من تطوير علم المنطق – حيت اعتمدت على أفكار منطقية أبسط من تلك المعروفة في نسق البرنكيبيا – إ لا أن هذه الأنساق قد استمدت قوتها من نسق البرنكيبيا.

المصادر والمراجع

أولاً : المصادر

أ) المصادر المترجمة إلى العربية:

(رسل) برتراند (١) أصول الرياضيات الجزء الأول ، ترجمة د/ محمد مرسى أحمد، د/ أحمد فؤاد الأهوانى، دار المعارف بمصر، القاهرة، ١٩٦٥

______ (٢) فلسفتى كيف تطورت، ترجمة عبد الرشيد الصادق، مراجعة وتقديم د/ زكى نجيب محمود، الطبعة الأولى، مكتبة الأنجلو المصرية، ١٩٦٠

______ (٣) مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة د/ محمد مرسى أحمد، مراجعة د/ أحمد فؤاد الأهوانى، مؤسسة سجل العرب، القاهرة ، ١٩٨٠

(فتنجشتين) لودفيج (٤) رسالة منطقية فلسفية، ترجمة د/ عزمى إسلام، مراجعة د/ زكى نجيب محمود، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ١٩٦٨

ب) المصادر الأجنبية:

(Hilbert) D & (ACKermann) *(1)* Principles of mathematical logic Chelsea publishing company, New York, 1950

(Quine) W. V. O. *(2)* Methods of logic, a Holt dryden book, New York, 1959

(Ramsey) Frank Plumpton *(3)* The foundation of mathematics and other logical essays, Kegan Paul, Trench, London, 1931

(Russell) Bertrand *(4)* Logic and knowledge, Essays 1901-1950, edited by Robert Charles Marsh, Georg Allen & Unwin LTD, London, 1950

________ *(5)* Mysticim and Logic, Unwin book, London, 1963

(Whiethead) Alfred North & (Russell) Bertrand (6) Principia Mathematica, Vol. 1, Cambridge university press, Cambridge, 1962

ثانياً : المراجع العربية والمترجمة إليها

أ) المراجع العربية:

د/ زكى نجيب محمود (١) المنطق الوضعى، الجزء الأول، الطبعة الخامسة، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ١٩٧٣

________ (٢) المنطق الوضعى، الجزء الثانى، الطبعة الخامسة، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ١٩٨٠

د/ عزمى إسلام (٣) دراسات فى المنطق مع نصوص مختارة، مطبوعات جامعة الكويت، الكويت، ١٩٨٥

________ (٤) أسس المنطق الرمزى، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة ١٩٧٠

د/ على عبد المعطى، د/ محمد قاسم (٥) المنطق الرياضى، الأسس والتطور والنظريات، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ١٩٨٥

د/ ماهر عبد القادر (٦) المنطق الرياضى، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ١٩٨٩

د/ محمد ثابت الفندى (٧) أصول المنطق الرياضى، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ١٩٨٧

________ (٨) فلسفة الرياضة، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ١٩٩٠

د/ محمد قاسم (٩) جوتلوب فريجه، نظرية الأعداد بين الأبستمولوجيا والأنطولوجيا، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ١٩٩١

________ (١٠) نظريات المنطق الرمزى، بحث فى الحساب التحليلى والمصطلح، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ١٩٩٦

د/ محمد مهران (١١) فلسفة برتراند رسل، دار المعارف، القاهرة، ١٩٧٩

________ (١٢) مقدمة فى المنطق الرمزى، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة، ١٩٩٥

د/ محمود فهمى زيدان (١٣) المنطق الرمزى – نشأته وتطوره، دار النهضة العربية، بيروت، ١٩٧٣

ب) المراجع المترجمة إلى العربية:

(أمبروز) أليس، (لازيروفيتش) موريس (١) أوليات المنطق الرمزى، ترجمة د/ عبد الفتاح الديدى، مطبوعات المجلس الأعلى للثقافة، القاهرة ، ١٩٨٣

(تارسكى) الفرد (٢) مقدمة للمنطق ولمنهج العلوم الاستدلالية، ترجمة د/ عزمى إسلام، مراجعة د/ فؤاد زكريا، الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر، القاهرة، ١٩٧٠

(ديمتريو) أنطون (٣) تاريخ المنطق، قراءات حول التطور المعاصر للمنطق الرياضى، الجزء الرابع، ترجمة ودراسة وتعليق د/ إسماعيل عبد العزيز، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة، ١٩٩٧

(لوكاشيفيتش) يان (٤) نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق الصورى الحديث، ترجمة وتقديم د/ عبد الحميد صبرة، دار المعارف، الإسكندرية، ١٩٦١

ثالثاً : المراجع الأجنبية

(Ambrose) Alice & (Lazerowitz) Morris (1) Essays In the unknown Wittgenstein, Prometheus book, buffalo, New York, 1984

(Ackarmann) Robert John, *(2)* Modern deductive logic, Macmillan, New York, 1968

(Anderson) John M, (Johnston) Hanry W, *(3)* natural deduction, the logical basis of axioms system, wads worth. Publication co., Belmont, California, 1962.

(Ayer) A. J. *(4)* Russel, Routlege, London, 1972

(Benaceraf) Paul *(5)* Frege, The Last Logicist, Reading From Frege's Philosophy Of Mathematics, Edited By William Demopoulos, London, 1997

(Bird) Otto *(6)* A precise of mathematical logic, D. Reid publishing company, dordrecht, Holland,1959

(Botton) A. *(7)* An Introduction to Digital Logic, Macmillan, New York, 1973

(Bradley) Raymond *(8)* The Natur of all beings, A study of wittgunstein's modal atomism, Oxford university press, Cambridge, 1992

(braine) Martin D.S & (Brien) David D.O *(9)* Mental logic, Lawrence Erlbaum associates, New jersey, 1998

(Brenner) William H. *(10)* Wittganstein, an introduction, Translated by John. F Holly & Joachin schulte, State university of new York press, New Jersey, 1992

(Bung) Mario *(11)* Intuition and science, prentice hall, new Jersey, 1962

(Carnap) Rudolf *(12)* Introduction to Symbolic Logic and its applications, Dover publications. INC, New York, 1998

——————— *(13)* The Old and the New Logic Reading From "logic as philosophy", Edited by, Peter T Manicas, Van Nostrand Reinhold company, New York, 1971

(Enger) Robert E & (Denonn) Laster E. *(14)* The basic writings of Bertrand Russell, 1903-1959, George Allen and Unwin LTD, London, 1961

(Floyd) Juliet *(15)* Future Pasts, the Analytic Tradition in twentieth century philosophy, Oxford university press, Oxford, 2003

(Friedrien) Theodore J Benac *(16)* Introduction To Mathematical Thinking, The Formation Of Concepts In Modern Mathematics, Translated By Friedrich Waisman, F. unger Pub., Co., New York, 1951

(Fruitz) Charles. A. *(17)* Bertrand Russell's construction of the external world, Routeledge & Kegam Poul, London, 1962

(Geach) Peter & (Black) Max *(18)* Translation From The Phiolosophy of Gottlob Frege, Basil Black wall, Oxford, 1980.

(Grayling) A. C. *(19)* Russell, A Very Short Introduction, oxford university press, Oxford, 2002

(Hersh) Reuben *(20)* What is Mathematics, realy, Oxford university press, New York, 1999

(Honderich) Ted *(21)* The Oxford companion to philosophy, Oxford university press, Oxford, 1995

(Jordan) A & (Reidal) D *(22)* Philosophy and Ideology, Dordrech to Holland, 1963

(Kattsoff) Louis. O *(23)* A philosophy of Mathematics, Iowa state college press, Ames, 1948

(Klibansky) Raymond *(24)* Philosophy in mid-century : a survey, vol 2, Nova Italia, firenze Italy, 1958

(Kline) Morris *(25)* Mathematics in the Modern world, Reading from Scientific American, W.H free man and company, San Francisco and London, 1968

(Kneal) W. & (Kneal) M *(26)* The development of logic, clarendon press, Oxford, London, 1962

(Korner) Stephan *(27)* The philosophy of Mathematics, An Introductory Essay, butchison university library, London, 1968

(Langer) Susan. K. *(28)* Introduction to Symbolic Logic, Dover publication, Inc, New York, 1967

(Lee) Harold Newton *(29)* Symbolic Logic, Routlege & Kegan Paul limited, London, 1969

(Levi) Albert William *(30)* Philosophy and The Modern World, Indiana university press, Bloomington, publication, New York, 1959

(Lewis) C.I. *(31)* A Survey of Symbolic Logic, Dover publication, INC, New York, 1960

(Maddy) Penelop *(32)* Realism in Mathematics, Clarendon press, Oxford, 1992

(Marcus) Ruth Barcan *(33)* Modalities, Philosophical Essays, Oxford university press, Oxford, 1993

(Marion) Mathieu *(34)* Wittgenstein, Finitism, and the Foundation of Mathematics, Clarendon press, Oxford, 1998

(Nidditch) P.H. *(35)* The Development of Mathematical logic, Routledge, Kegan Paul, London, 1962

(Pears) D.F. *(36)* Bertrand Russell, A Collection of Critical Essays, double day & company INC, Garden City, New York, 1972.

(Pont) James Pier *(37)* The History of Mathematics in Ninteenth Century, in Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 37, No. 1, 1999

(Ramsden) Elizabeth Eames *(38)* Bertrand Russell's dialogue with his contemporaries, Southern Illinois university press, Illinois, 1989.

(Read) Stephen *(39)* Thinking about Logic, Oxford university press, London, 1994

(Reichanbach) H. *(40)* Elements of Symbolic Logic, Dover publication, New York, 1975

(Schaff) Adam *(41)* Introduction to Semantics, Pergamon press, Oxford, London, 1962

(Ullian) Joseph S. *(42)* Quine and the Field of Mathematical Logic, in the philosophy of W V. Quine, by Paul Arthur Schilpp, open court, LaSalle, Illinois, 1986

(Warnok) G.J. *(43)* English philosophy since 1900, Oxford university press, London, 1985

(Weitz) Morris *(44)* **Analysis and the unity of Russell's Philosophy, in the philosophy of Bertrand Russell, by Paul Arthur Schilpp, North western university, Evanston and Chicago ,1944**

(Wilder) Raymond *(45)* Introduction to the foundation of mathematics, second edition, John Wiley & Sons, INC, New York, 1965

(Wood) Alen *(46)* Bertrand Russell, the bassionate, Skeptick. Pub., Simon and Schuster, New York, 1985

رابعاً : دوائر المعارف والمعاجم

Paul Edward, (1) The Encyclopedia of philosophy, Vol. 3, Macmillan publishing Co., INC, Free press, New York, 1967

خامساً : مواقع إلكترونية مستقى منها معلومات

1- www.amazon.com

2- www.Metacrawler.com, stanford encyclopedia of philosophy

3- www.wikipedia.org

فهرس محتويات الرسالة

المـــوضـــوع	رقم الصفحة
المقدمة	١ – ٦
الفصل الأول: **رياضيات القرن التاسع عشر وآثارها على تطور علم المنطق**	٧ – ٣٩
تمهيد	٩
أولاً : العلاقة بين الرياضيات والمنطق	١١
ثانياً : تطور علم المنطق	١٨
١– جورج بيكوك	١٨
٢– دي مورجان	١٩
٣– جورج بول	٢٢
٤– جوتلوب فريجه	٢٦
٥– جوسيب بيانو	٣٣
تعقيب	٣٨
الفصل الثانى : **برتراند رسل ونسق البرنكيبيا**	٤٠ – ٩٥
تمهيد	٤٢
أولاً : وصف كتاب برنكيبيا ماتيماتيكا	٤٤
ثانياً : أهمية كتاب برنكيبيا ماتيماتيكا ودور رسل فيه	٤٦
ثالثاً : الرموز المستخدمة فى كتاب برنكيبيا ماتيماتيكا	٥١
رابعاً : ترقيم المبرهنات فى نسق البرنكيبيا	٥٣
خامساً : الموضوعات المنطقية فى كتاب برنكيبيا ماتيماتيكا	٥٥
أ– موقف رسل من مبحث القضايا	٥٥
ب– نظرية حساب القضايا	٥٩
جـ– نظرية حساب دوال القضايا (حساب المحمول)	٦٥
د– نظرية الأوصاف	٦٩
هـ– نظرية حساب الفئات	٧٧
و– نظرية الأنماط المنطقية	٨٣
ي– نظرية حساب العلاقات	٨٩
تعقيب	٩٥

المـــــــوضـــــــوع	رقم الصفحة
الفصل الثالث : الاتجاه المنطقى عند رسل وموقفه من أهم الاتجاهات السائدة في عصره ----------------	٩٦ – ١٣٦
تمهيد ----------------	٩٨
أولاً : الاتجاه المنطقى عند رسل فى ضوء تفسيره للأعداد ----------------	١٠٠
ثانياً : الاتجاه الصورى ----------------	١٠٧
– موقف رسل من الاتجاه الصورى ----------------	١١٨
ثالثاً : الاتجاه الحدسى ----------------	١٢١
– موقف رسل من الاتجاه الحدسى ----------------	١٣٤
تعقيب ----------------	١٣٦
الفصل الرابع : تطوير المناطقة المعاصرين واللاحقين لمنطق رسل	١٣٧ – ١٦٩
تمهيد ----------------	١٣٩
١– لودفيج فتجنشتين ----------------	١٤٠
أ– أسس رياضيات ----------------	١٤١
ب– الذرية المنطقية ورؤية العالم ----------------	١٤٤
٢– فرانك بلمبتون رامزى ----------------	١٤٩
أ– نظرية الأنماط ----------------	١٥٠
ب– دالة القضية ----------------	١٥٢
٣– كلارنس إيرفينج لويس ----------------	١٥٤
٤– ويلارد فان كواين ----------------	١٥٩
٥– يان لوكاشيفيتش ----------------	١٦٢
تعقيب ----------------	١٦٨
كشف بأهم الرموز المستخدمة فى الرسالة ----------------	١٧٠
الخاتمة ----------------	١٧١
قائمة المصادر والمراجع ----------------	١٧٦
فهرس محتويات الرسالة ----------------	١٨٧